saze118.com

تحلیل سازه

saze118.cocm

saze118.com

مهندسی عمران

تحلیل سازه

saze118.cocm

saze118.com

فهرست مطالب

فصل اول – بررسی کلی و تشخیص سازه‌ها ۹
1-1 سازه‌های معین و نامعین 9
تعریف تکیه‌گاه: 10
سازه ناپایدار: 12
1-2-1- خرپای دو بعدی 17
تعیین درجه آزادی 17
2-2-1- درجه آزادی انتقالی 18
2-1 بررسی پایداری سازه‌ها 20
1-2-1 انواع سازه‌های ناپایدار 21
روش اعمال بار 26
روش بار صفر 27
نکات کلیدی فصل اول 29
تست‌های طبقه‌بندی فصل اول 30
پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول 39
فصل دوم – تحلیل استاتیکی سازه‌های معین ۴۸
1-2- خرپا 50
کار مجازی- بارواحد 56
2-2 خط تأثیر (Influence Line) 59
نشست تکیه گاهی 77
تغییرات دما 77
2-2- قاب 79
نکات کلیدی فصل دوم 82
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم 83
پاسخ تشریح تست‌های طبقه‌بندی فصل دوم 96
فصل سوم – تغییر شکل سازه‌ها ۱۱۰
1-3- انتگرال مضاعف 110
1-3 روش تیر مزدوج (Conjugate Beam) 112

saze118.com

2-3- لنگر سطح 119
تحلیل سازه های نامعین با استفاده از روش تغییر مکانهای سازگار 132
نکات کلیدی فصل سوم 134
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم 135
1-4 روش سازگاری تغییر شکل‌ها (روش نیرو) 165
نشست تکیه‌گاهی 170
2-4 قضایای کاستلیانو (Castigliano's Theorems) 172
قضیه حداقل انرژی (مینیمم کار) 174
1-4- شیب- افت 176
4-4 روش پخش لنگر (Momet Distribution) 180
سختی اصلاح شده 183
تیرهای غیر منشوری: 185
نکات کلیدی فصل چهارم 188
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم 189
پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم 203
فصل پنجم – تحلیل سازه‌های متقارن ۲۱۶
قضیه اول تقارن: 218
قضیه دوم تقارن: 218
1-5 خواص تقارن مستقیم 219
2-5 خواص تقارن معکوس 222
مجموعه تست 227
پاسخ تشریحی 234
مجموعه تست 241
پاسخ تشریحی 247
منابع 253

saze118.com

saze118.cocm

saze118.cocm

SAZE118.COM

فصل اول – بررسی کلی و تشخیص سازه‌ها

قبل از شروع بحث تحلیل سازه‌ها، ابتدا ضرورت دارد نسبت به شناخت سازه اقدام شود.

در این فصل سازه‌های معین و نامعین شناسایی شده و پایداری یا ناپایداری آن‌ها کنترل می‌شود.

1-1 سازه‌های معین و نامعین

سازه معین:

به سازه‌ای اطلاق می‌شود که تحلیل آن، تنها با استفاده از روابط استاتیکی امکان‌پذیر باشد.

به عبارت دیگر اگر تعداد کل مجهولات سازه برابر تعداد کل معادلات تعادل در آن باشد، به شرط پایداری سازه را معین استاتیکی یا ایزواستاتیک گویند.

روابط استاتیکی در حالت سه بعدی عبارتند از:

$$\sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0,\ \sum M_z = 0,\ \sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0$$

در حالت دو بعدی، این روابط عبارتند از:

$$\sum M = 0,\ \sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0$$

روابط تعادل در حالت‌های خاص بارگذاری کاهش می‌یابند:

– در سازه‌های سه بعدی:

الف) اگر نیروها موازی باشد، سه رابطه تعادل مستقل خواهیم داشت.

ب) اگر نیروها در یک نقطه متقاطع باشند، سه رابطه تعادل مستقل خواهیم داشت.

– در سازه‌های دو بعدی:

الف) اگر نیروها موازی باشند، دو رابطه تعادل مستقل خواهیم داشت.

ب) اگر نیروها در یک نقطه متقاطع باشند، دو رابطه تعادل خواهیم داشت.

علاوه بر روابط استاتیکی، در برخی از سازه‌ها، به دلیل نحوه ساخت یا نحوه اتصال اعضاء، بعضی از نیروهای داخلی در مقطع معینی برابر صفر می‌شود. این نکته یک رابطه اضافی به وجود می‌آورد که اصطلاحاً «رابطهٔ شرطی» می‌گویند.

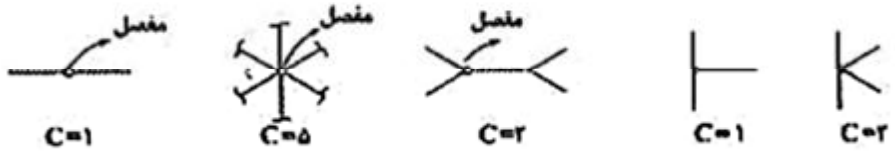
روابط شرطی در چهار حالت دورانی، محوری، برشی و غلتک داخلی تعریف می‌شود:

saze118.com

SAZE118.COM

الف) حالت دورانی

(1-1) $C=$(تعداد روابط شرطی) (1- تعداد امتدادهای صلب)



شکل 1-1 انواع حالت‌های دورانی

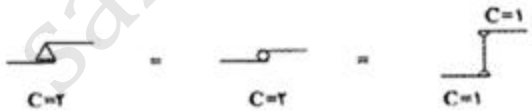
ب) در حالت محوری، $C=1$ می‌باشد. زیرا نیروی محوری برابر صفر است و انتقال پیدا نمی‌کند.

شکل 1-2 انواع حالت‌های محوری

ج) در حالت برشی نیز $C=1$ می‌باشد. زیرا برش برابر صفر است.

شکل 1-3 انواع حالت‌های برشی

د) در غلتک داخلی، $C=2$ است. زیرا در آن برش و لنگر برابر صفر هستند.



شکل 1-4 نمونه‌های غلتک داخلی

تعریف تکیه‌گاه:

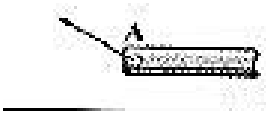
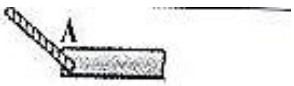
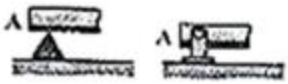
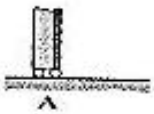
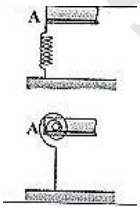
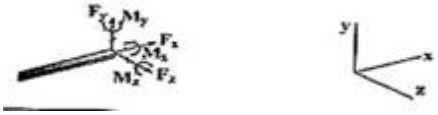
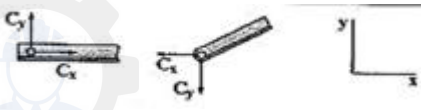
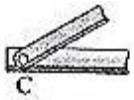
در هر نقطه از یک سازه دوبعدی، در حالت کلی سه درجه آزادی (دو تغییر مکان در دو امتداد عمود برهم و یک دوران) وجود دارد که در صورت محدود نمودن هر یک از این درجات آزادی به‌طور کامل یا ناقص، یک عکس‌العمل متناظر تکیه‌گاهی در آن نقطه به‌وجود می‌آید.

در جدول 1-1، نمایی از تکیه‌گاه‌ها و اتصالات مختلف و عکس‌العمل‌های مجهول آن‌ها نشان داده شده است.

به عنوان مثال در یک تکیه‌گاه غلتکی یک درجه آزادی تغییر مکان به‌طور کامل بسته است و در نتیجه یک عکس‌العمل متناظر تکیه‌گاهی در آن نقطه به‌وجود می‌آید. ولی اجازه حرکت در امتداد عمود بر امتداد بسته شده و دوران را دارد.

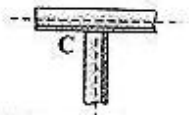
SAZE118.COM

جدول 1-1 عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌ها و اتصالات

نوع تکیه‌گاه و اتصال	عکس‌العمل جایگزین	نمای اصلی
حالت دو بعدی		
تکیه‌گاه غلتکی		
کابل یا میله		
تکیه‌گاه مفصلی		
تکیه‌گاه گیردار		
تکیه‌گاه نیم گیردار		
تکیه‌گاه ارتجاعی		
حالت سه بعدی		
مفصل گلوله‌ای		
تکیه‌گیردار		
اتصالات دوبعدی		
اتصال مفصلی		

saze118.com

SAZE118.COM

اتصال صلب		

مجهولات کلی سازه عبارتند از: مجموع عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی اعضاء.

تعداد نیروهای داخلی مجهول در هر عضو در حالت سه بعدی برابر شش و در حالت دو بعدی برابر سه می‌باشد.

برای تشخیص معین یا نامعین بودن یک سازه از پارامتر «درجه نامعینی سازه» استفاده می‌شود.

تعریف کلی درجه نامعینی یک سازه عبارت است از: اختلاف تعداد کل مجهولات با تعداد کل روابط مستقل سازه.

این پارامتر می‌تواند در حالت کلی و یا در هنگام یک بارگذاری خاص بررسی شود.

به سازه‌هایی که درجه نامعینی آن‌ها برابر صفر باشد، سازه معین (ایزواستاتیک) و به سازه‌هایی که درجه نامعینی آن‌ها مثبت باشد، سازه نامعین (هیپراستاتیک) گفته می‌شود. یک سازه نامعین، به وسیله معادلت تعادل و روابط سازگاری تغییر شکل‌ها، مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

سازه ناپایدار:

در صورتی‌که تعداد کل مجهولات از تعداد کل معادلات تعادل در سازه کم‌تر باشد (درجه نامعینی سازه منفی باشد)، سازه را ناپایدار استاتیکی گویند.

اگر m تعداد اعضای سازه، j تعداد گره‌ها (در حالت دو بعدی هر گره سه مجهول دارد و در حالت سه بعدی هر گره شش مجهول دارد)، r تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و c تعداد روابط شرطی باشد، n درجه نامعینی سازه قابی شکل است و مقدار آن برابر است با:

الف) در حالت قاب سه بعدی

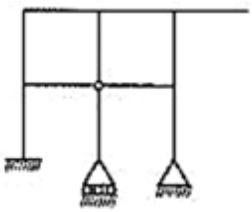
$$n=(6m+r)-(6j+c) \qquad (2\text{-}1)$$

ب) در حالت قاب دو بعدی (قاب مسطح)

$$n=(3m+r)-(3j+c) \qquad (3\text{-}1)$$

SAZE118.COM

مثال ۱: درجه نامعینی سازه مقابل کدام است؟



1) 3

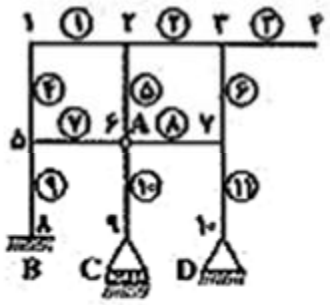
2) 6

3) 9

4) 10

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به جدول 1-1، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه B برابر 3، تکیه‌گاه C برابر 1 و تکیه‌گاه D برابر 2 می‌باشد همچنین در مفصل A، تعداد روابط شرطی برابر $3=1-4$ می‌باشد. شماره اعضاء در داخل دایره و شماره گره‌ها در کنار آن‌ها ذکر شده است.



$$(3-1) \Rightarrow n=(3\times 11+6)-(3\times 10+3)=6$$

توجه شود که اگر عضو 3، جزء اعضاء در نظر گرفته شود، گره 4 نیز در محاسبات به‌شمار نخواهد آمد. (می‌توان عضو 3 و گره 4 را در نظر گرفت.)

* نکته 1: اگر در سازه، تعداد L حلقه بسته وجود داشته باشد و تعداد معادلات استاتیکی را با S نشان دهیم، با توجه به اینکه هر کادر بسته دارای 3 درجه نامعینی است و S در حالت دو بعدی برابر 3 و در حالت سه بعدی برابر 6 می‌باشد، درجه نامعینی را می‌توان از رابطه 1-4 تعیین کرد.

$$n=(3L+r)-(s+c) \qquad (4\text{-}1)$$

saze118.com

SAZE118.COM

مثال ۲: درجه نامعینی سازه زیر کدام است؟

1) 9

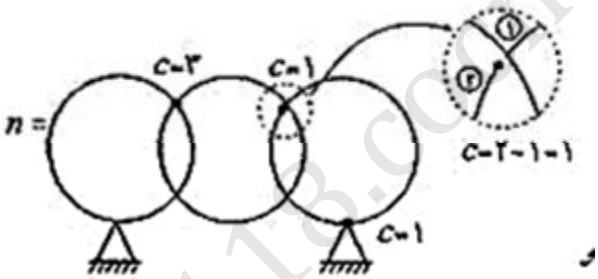
2) 10

3) 11

4) 12

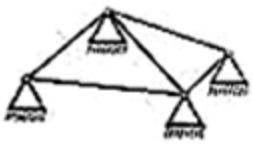
حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با استفاده از رابطه (1-4) برای 5 حلقه داریم:



* نکته 2: در حالت سه بعدی، تعداد روابط شرطی، 3 برابر حالت دو عضو دو سر مفصل، یکی از روابط شری حذف می‌شود. زیرا با بستن پیچش یک عضو دو سر مفصل، طرف دیگر نیز متعادل خواهد بود.

مثال ۳: درجه نامعینی سازه زیر کدام است؟



1) صفر

2) 3

3) 5

4) 9

حل: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

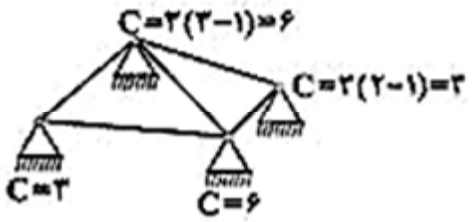
تعداد اعضاء سازه 5 و تعداد گره‌ها نیز 4 می‌باشد. تعداد روابط شرطی، با توجه به نکته 2، در کنار شکل مشخص شده است. ولی از آنجا که 5 عضو دو سر مفصل داریم، خواهیم داشت:

تعداد روابط شرطی $C=(3+3+6+6)-5=18-5=13$

SAZE118.COM

تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با توجهبه جدول 1-1 (مفصل گلوله‌ای) در هر کدام برابر 3 خواهد بود (مجموعاً 12).

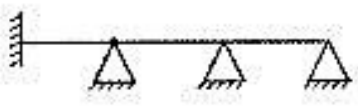
بنابراین با استفاده از رابطه 2-1 خواهیم داشت:



* نکته 3: در صورتی‌که تعداد کادرهای بسته یک سازه برابر صفر باشد (مانند تیر سراسری) درجه نامعینی سازه برابر است با:

$$n = r - (c + 3) \qquad (5\text{-}1)$$

مثال ۴: درجه نامعینی سازه زیر کدام است؟

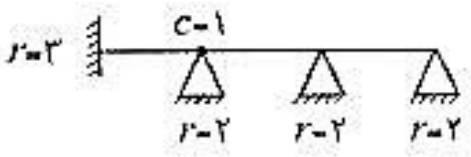


1) 4　　2) 5

3) 6　　4) 7

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با استفاده از رابطه (1-5) داریم:



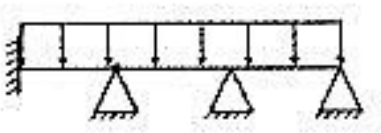
$$n = 9 - (1 + 3) = 5$$

* نکته 4: اگر در تیرهای سراسری بارگذاری قائم باشد، با توجه به آن که در تیرهای معمولی (نسبت عمق به طول کم است) بارگذاری قائم ایجاد هیچ‌گونه تغییر شکل و نیروی محوری نمی‌کند، پس می‌توان مجهولات و معادلات تعادل محوری را به‌طور کامل از رابطه فوق خارج کرد.

$$n = r - (c + 2) \qquad (6\text{-}1)$$

SAZE118.COM

مثال ۵: درجه نامعینی سازه زیر کدام است؟

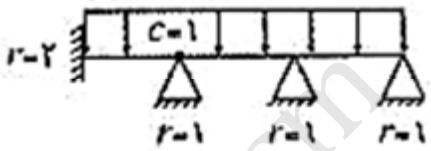


1) 2　　2) 5

3) 7　　4) 8

حل: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

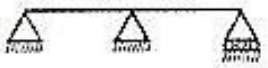
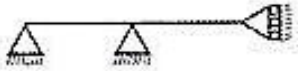
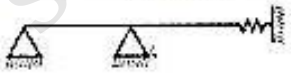
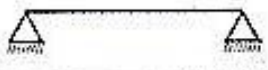
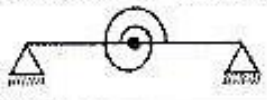
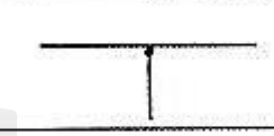
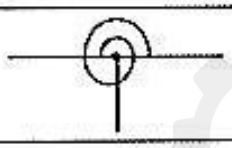
با استفاده از رابطه (1-6) داریم:



$$n = 5 - (1+2) = 2$$

* نکته 5: در بحث نامعینی سازه‌ها، می‌توان فنر را حذف کرد و در امتداد مربوطه سازه را صلب در نظر گرفت. (مطابق جدول 1-2)

جدول 1-2 نحوه جایگزینی فنرها

سازه معادل	سازه اصلی
	
	
	
	

saze118.com

SAZE118.COM

چند تعریف

N: تعداد گره های سازه R: تعداد مجهولات تکیه گاهی

M : تعداد اعضای سازه C: condition شرایط نیرویی اضافه

تذکر: گره در سازه را با مفصل اشتباه نگیرید، هر گاه دو یا چند عضو در نقطه ای به یکدیگر برسند، در آنجا گره خـواهیم داشت و هر گاه این اعضاء بتوانند در گره دوران مستقل داشته باشند (ممان در این حالت در گره صفر خواهد بود) مفصل خواهیم داشت.

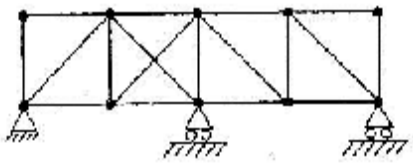
1-2-1- خرپای دو بعدی

می دانیم که چون اعضای خرپای دو بعدی دو سر مفصل می باشند، این اعضاء فقط نیروی محوری تحمـل مـی کننـد و بنابراین هر عضو فقط یک مجهول (نیروی محوری) خواهد داشت. همچنین برای هر گره (که مفصل می باشد) دو معادله استاتیکی $\sum F_y = 0, \sum F_x = 0$ می توان نوشت بنابراین درجه نامعین خرپای دو بعدی برابر خواهد بود با :

درجه نامعینی : $n = (R + M) - 2N$

تذکر: در صورتی که n برابر صفر می شود خرپا معین و در صورتی که n منفی شود خرپا ناپایدار خواهد بود.

مثال: درجه نامعینی خرپای روبرو را تعیین کنید



(مفصل ها با نقاط توپر مشخص شده اند)

$M = 18, R = 4, N = 10$

$\Rightarrow n = (M + R) - 2N = (18 + 4) - 2 \times 10 = 2$

تعیین درجه آزادی

تعداد تغییر مکانی مستقلی که در سازه می تواند بوجود آید را درجه آزادی گویند که بر دو نوع است.

1) درجه آزادی دورانی

2) درجه آزادی انتقالی

SAZE118.COM

نکته: درجه آزادی واقعی سازه مقداری بی نهایت است (زیرا می توانیم بی نهایت گره داخلی داشته باشیم)

نکته: درجه آزادی و درجه نامعینی با یکدیگر نسبت عکس دارند یعنی با زیاد شدن نامعینی از درجه آزادی سازه کم می شود و بالعکس

1-2-2- درجه آزادی انتقالی

الف) روش شمارش

کم اشتباه ترین راه حل برای بدست آوردن درجه آزادی انتقالی، شمارش اشت که این روش در مثال هـایی توضـیح داده شده است.

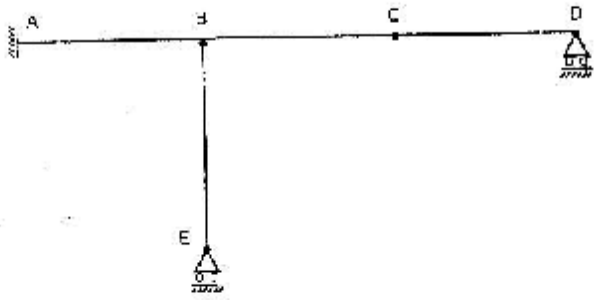
مثال : درجه آزادی انتقالی سازه روبرو را بیابید.

$\Delta = 1$ درجه آزادی انتقالی $q = 1$ درجه آزادی دورانی

سازه فقط در گره B و در راستای عمودی توانایی جابجایی دارد.

توجه کنید اگر تکیه گاه به صورت Δ می بود دیگر درجه آزادی انتقالی نداشتیم زیرا تکیه گـاه A بـه همـراه میلـه AB جلوی تغییر مکان افقی و تکیه گاه B جلوی تغییر مکان عمودی را می گرفتند.

مثال: درجه آزادی سازه روبرو را بیابید.



$$\Delta = 2 \quad , \quad q = 5$$

گره E در راستای افقی توانایی جابجایی دارد.

گره B به خاطر وجود اعضای BE,AB و تکیه گـاه هـای E,A در دو راسـتای عمـودی و افقـی مهـار شـده و توانـایی

saze118.com

SAZE118.COM

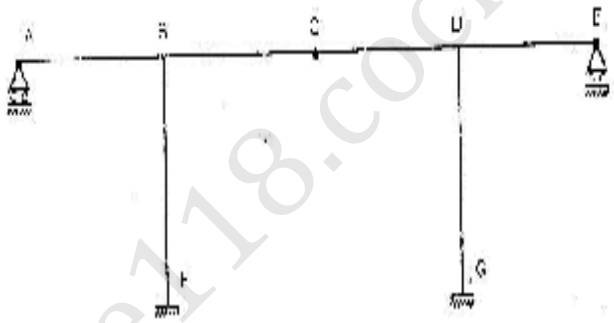
جابجایی ندارد.

گره C در راستای عمودی توانایی جابجایی دارد.

گره D به خاطر وجود میله های AB,BC,CD و وجود تکیه گاه A ، توانایی جابجای افقی نداشته و به خاطر خود تکیه گاه D توانایی جابجایی عمودی ندارد.

مثال: درجه آزادی سازه روبرو را بیابید.

$$\Delta = 2 \quad , \quad q = 6$$



گره های E,D,C,B,A همه با هم در راستای افقی دارای یک تغییر مکان هستند زیرا بوسیله اعضای افقی به یکدیگر متصل شده اند.

گره C دارای یک درجه آزادی عمودی است.

ب) رابطه ای برای سازه های عادی

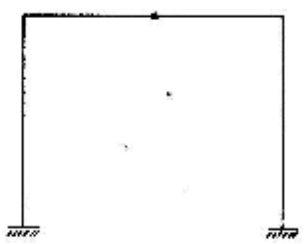
رابطه زیر در سازه هایی قابل استفاده است که به یک گره دو عضو از دو تکیه گاه متفاوت وارد نشده باشند.

تعداد اعضایی که – تعداد تغییر مکانهای تکیه گاهی + تعداد گره های داخلی (غیر تکیه گاهی) $\times 2 = \Delta$ فاقد تغییر شکل محوری باشند

saze118.com

SAZE118.COM

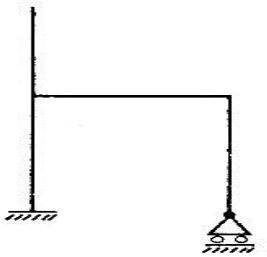
مثال: درجه آزادی سازه روبرو را تعیین کنید.



$$\Delta = ? \quad , \quad q = 4$$

$$\Delta = 2\times 3 + \mathbf{0} - 4 = 2 \Rightarrow n = \Delta + q = 2 + 4 = 6$$

مثال: درجه آزادی سازه روبرو را بیابید



$$\Delta = ? \quad , \quad q = 4$$
$$\Delta = 2\times 3 + 1 - 4 = 3 \Rightarrow n = \Delta + q = 3 + 4 = 7$$

نکته: میله صلب از تعداد کل درجات آزادی ، 2 تا کم می کند.

2-1 بررسی پایداری سازه‌ها

سازه پایدار، سازه‌ای است که تحت اثر هیچ نیرویی، موقعیت آن تغییر نیابد و در صورت تغییر، با حذف نیرو به حالت اولیه خود بازگردد.

شرط لازم و کافی برای پایداری یک جسم صلب در صفحه این است که حداقل سه مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی ناموازی و نامتقارب (متقاطع در یک نقطه) وجود داشته باشد.

* نکته 7: کلیه سازه‌هایی که دارای ناپایداری هندسی هستند، نامعین نیز می‌باشند و به تنهایی توسط معادلات تعادل، قابل تحلیل نمی‌باشند.

در حالت دو بعدی، اگر سه معادله تعادل $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$ برقرار باشند، سازه در حالت تعادل پایدار استاتیکی است.

اگر یکی از معادلات فقط به ازای یک بارگذاری خاص ارضاء نگردد، سازه ناپایدار می‌باشد، هر چند به ازای تمام بارگذاری‌های دیگر پایدار باشد.

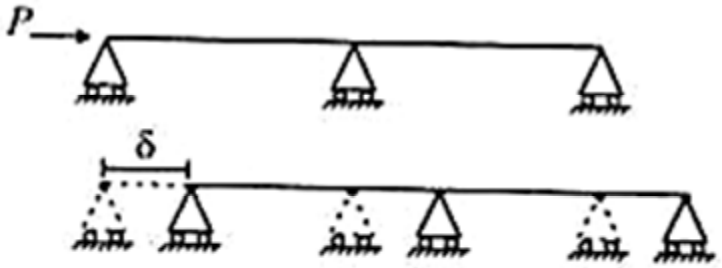
سازه‌ای را ناپایدار گوئیم. اگر تمامی قطعات سازه فقط برای یک لحظه دچار حرکت صلب گردند.

حرکت صلب در یک سازه به دو صورت زیر امکان‌پذیر است.

SAZE118.COM

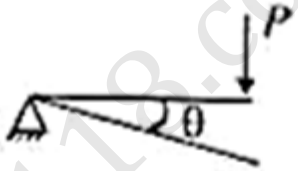
الف) تغییر مکان صلب:

در شکل زیر تمام قطعات سازه، یک میزان δ تغییر مکان می‌دهند و سازه شتاب می‌گیرد.



ب) دوران صلب:

تشخیص این دوران در سازه‌ها مهم است.



1-2-1 انواع سازه‌های ناپایدار

۱-۲-۱-۱ سازه‌های ناپایدار استاتیکی

در این سازه‌ها قید لازم برای ایجاد تعادل پایدار در سازه وجود ندارد، به عبارت دیگر درجه نامعینی این سازه‌ها منفی است. $(n<0)$

۱-۲-۱-۲ سازه‌های ناپایدار هندسه داخلی

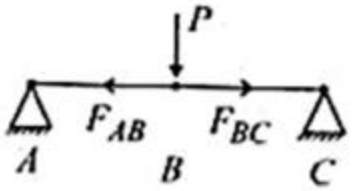
در این سازه ترتیب و نحوه اتصال اعضای داخلی به قسمی است که تعادل پایدار در سازه ایجاد نمی‌گردد.

به عنوان نمونه سه مفصل در یک راستا موجب ناپایداری هندسی داخلی می‌شوند.

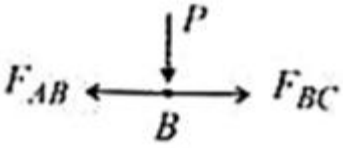
saze118.com

SAZE118.COM

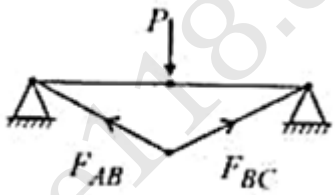
برای تعیین این‌گونه ناپایداری در سازه‌ها، دنبال نوعی بارگذاری هستیم که سازه را ناپایدار کند.



با ترسیم دیاگرام اتصال مفصل ملاحظه می‌شود در راستای قائم $\sum F_y \neq 0$ است، پس سازه ناپایدار هندسی داخلی است.



اما یک لحظه پس از اعمال بار، سازه تغییر شکل می‌دهد، و $\sum F_y = 0$ می‌گردد که سازه پایدار می‌گردد. این نوع ناپایداری را ناپایداری آنی گویند.

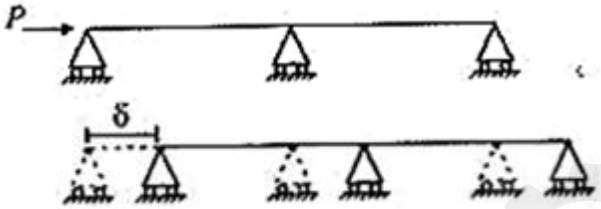


۱-۲-۱-۳ سازه‌های ناپایدار هندسی خارجی

در این سازه‌ها هندسه خارجی به نحوی است که تعادل پایدار در سازه ایجاد نمی‌گردد. منظور از هندسه خارجی، تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است.

در صورتی که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به یکی از دو حالت زیر باشد، سازه، ناپایدار هندسی خارجی است.

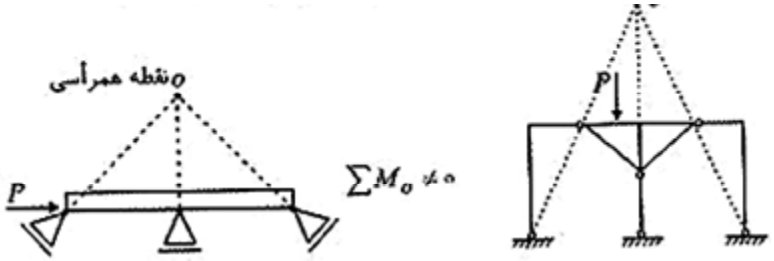
الف) اگر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی همگی با هم موازی باشند، سازه در برابر نیروی عمود بر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی هیچ مقاومتی از خود نشان نمی‌دهد. (تغییر مکان صلب)



(سازه تعادل نیرویی ندارد.) $\sum F_x \neq 0$

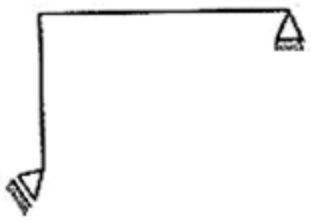
SAZE118.COM

ب) اگر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی همگی از یک نقطه بگذرند (تقارب)، با اعمال نیرویی که از نقطه همرأسی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نمی‌گذرد، سازه دچار دوران صلب حول آن نقطه می‌شود و ناپایدار می‌گردد. (دوران صلب)



همان‌طور که ملاحظه می‌گردد این سازه‌ها با اعمال نیروی P، در نقطه o دچار دوران صلب می‌گردند. پس سازه‌ها ناپایدار هندسی خارجی هستند.

مثال ۹: کدام عبارت در مورد سازه مقابل درست است؟



1) سازه معین و پایدار است.

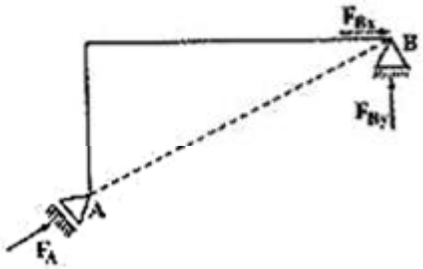
2) سازه نامعین و ناپایدار است.

3) سازه نامعین و پایدار است.

4) بدون اعمال نیروی خارجی نمی‌توان نظر داد.

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

به دلیل آن‌که مؤلفه‌های واکنش تکیه‌گایه در یک نقطه متقارب هستند، سازه ناپایدار هندسی است و با توجه به نکته 7، گزینه «2» پاسخ صحیح است.



یکی از راه‌های تشخیص ناپایداری سازه، کنترل ترکیبات شکل‌های 1-6، 1-7 و 1-8 است.

یک روش دیگر برای تشخیص ناپایداری، اعمال بار خارجی است، به گونه‌ای که باعث واژگونی و عدم تعادل نیروها در سیستم شود.

saze118.com

مثال ۱۰: کدام عبارت در مورد سازه مقابل درست است؟

1) معین و پایدار

2) نامعین و پایدار

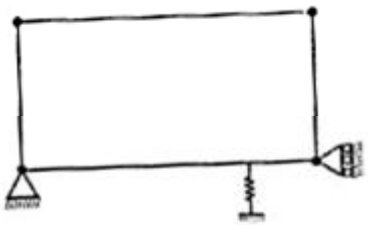
3) معین و ناپایدار

4) نامعین و ناپایدار

حل گزینه‌ی «۴» صحیح است.

به دلیل آن‌که عکس‌العمل تکیه‌گاهی متقارب هستند، سازه از نظر هندسی ناپایدار است و با توجه به نکته 7، گزینه «4» پاسخ صحیح است.

مثال ۱۱- کدام عبارت در مورد سازه مقابل صحیح است؟



1) معین و پایدار

2) معین و ناپایدار

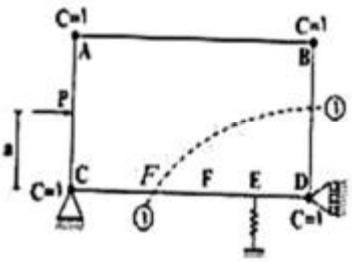
3) نامعین و ناپایدار

4) نامعین و پایدار

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با استفاده از رابطه 1-4 برای یک حلقه بسته خواهیم داشت:

$n=(3\times1+4)-(3+4)=0\Rightarrow$ سازه معین است.



با وارد کردن نیروی p در فاصله a از تکیه‌گاه c، سازه را مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

B تعادل در گره $\Rightarrow F_{BA}=F_{BD}=0$

$1\text{-}1$ در برش $\sum M_F=0\Rightarrow E_y=0$

$\sum M_C\Rightarrow M=P.a\neq0$

SAZE118.COM

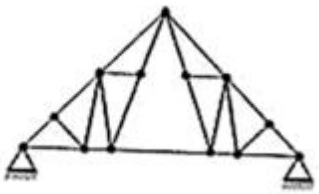
بنابراین تعادل برقرار نیست و سازه ناپایدار است.

خرپاهای ساده را نیز مانند اجسام صلب می‌توان با دو عضو غیرموازی و غیرمتقارب، با یک گره و یک عضو غیـرهم‌محـور، 2 یا چند مفصل غیرتکه موور و ... به یکدیگر منتقل نمود.

الف) خرپاهایی که درجه نامعینی آن‌ها منفی باشد.

ب) خرپاهای که اتصال آن‌ها ناپایدار باشد (اتصال به وسیله اعضای موازی و یا متقارب، گره و عضو هم‌محور و...)

مثال ۱۲: کدام عبارت در مورد سازه زیر صحیح است.



1) معین و پایدار

2) معین و ناپایدار

3) نامعین و پایدار

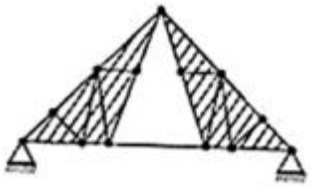
4) نامعین و ناپایدار

حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

این خرپا نیز ترکیبی از 2 خرپا ساده است که با یک مفصل و یک عضو به یکدیگر متصل شده‌اند و چون مفصـل و عضـو، غیرهم محور هستند، سازه پایدار است.

درجه نامعینی سازه با استفاده از رابطه 1-8 عبارت است از:

$$n=(23+4)-2\times13=1$$



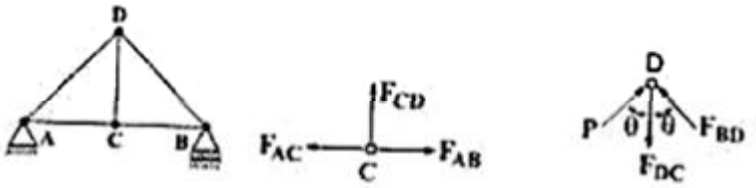
بنابراین سازه نامعین و پایدار است.

در مورد خرپاها می‌توان برای تحقیق پایداری از روش «بار صفر» نیـز اسـتفاده کـرد. در یـک خرپـای پایـدار کـه تحـت هیچ‌گونه بار خارجی نباشد، تنها پاسخ ممکن برای نیروی اعضاء، صفر است. با توجه به این موضوع مـی‌تـوان بـا در نظـر گرفتن یک نیرو و در یکی از اعضای خرپای معین، بدون بارگذاری خارجی، نیروی داخلی سایر اعضاء را محاسـبه نمـود و در صورتی‌که به تناقض نرسیم، آن خرپا، ناپایدار می‌باشد.

SAZE118.COM

برای مثال در سازه معین زیر، اگر نیروی عضو AD را برابر P در نظر بگیریم. با ترسیم دیاگرام آزاد مفصل D خواهیم داشت:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BD} = P$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{DC} = 2P\cos\theta$$

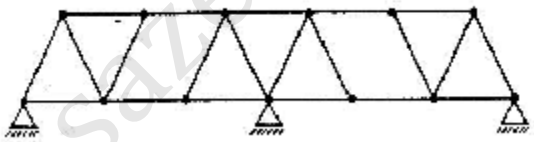


از طرفی با ترسیم دیاگرام آزاد مفصل C ملاحظه می‌شود که $F_{DC} = 0$ است. به دلیل آن‌که به تناقض رسیدیم، سازه پایدار است.

روش اعمال بار

این روش برای نقض پایداری سازه به کار می رود به این صورت که باری روی سازه قرار می دهیم و با حل تقریبی سازه به این نتیجه می رسیم که سازه ناپایدار است.

توجه: در صورتی که این روش جواب ندهد و سازه در یک نوع بارگذاری پایدار باشد به مفهوم آن نیست که سازه به طور کلی پایدار است.

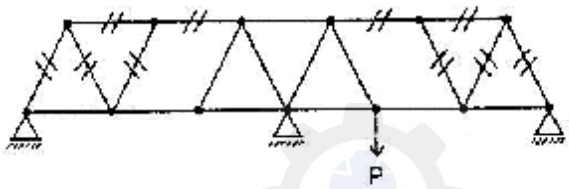


مثال: پایداری یا ناپایداری خرپای روبرو را تعیین کنید.

$$M = 21, R = 6, N = 13 \Rightarrow n = (21+6) - 2\times 13 = 1$$

ناپایداری ایستایی ندارد.

از آنجا که خرپای ساده وسط به وسیله 4 عضو موازی به دو خرپای کناره وصل شده است، حدس می زنیم که ممکن است ناپایدار باشد، بنابراین از روش اعمال بار استفاده می کنیم.

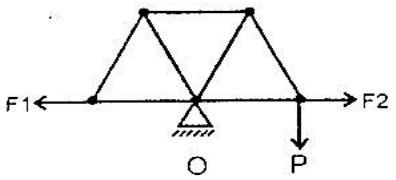


SAZE118.COM

ابتدا اعضای صفر نیرویی را نشان داده و سپس خرپای وسطی را جدا می کنیم.

همانطور که می بینیم $\sum M_{o} \neq 0$

بنابراین خرپا ناپایدار خواهد بود.

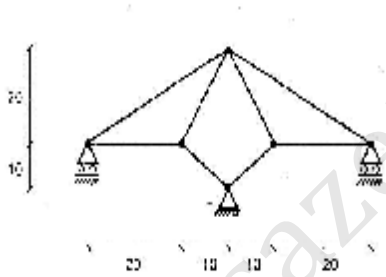


روش بار صفر

بیشتر برای خرپاهای بغرنج با $n = 0$ بکار می رود.

روش کار به این صورت است که نیروی یکی از عضوهای داخلی را مجهول گرفته و بقیه سازه را حل می کنیم. حال اگر بر اثر شرایط تعادل در گره ها به این نتیجه رسیدیم که نیروی مجهول صفر خواهد بود بنابراین خرپا ناپایدار نخواهد بود و در غیر اینصورت اگر شرایط تعادل در همه گره ها ارضا شود، بنابراین سازه ناپایدار خواهد بود.

مثال: ناپایداری خرپای روبرو را از روش بار صفر تحقیق کنید.



نکته: ناپایداری سازه های متقارن و یا نسبتاً متقارن را می توان با روش بار صفر فهمید.

۱-۳-۳- ناپایداری هندسی خارجی

این ناپایداری به دلیل ترکیب نامناسب تکیه گاه ها ایجاد می شود و بر دو نوع است.

الف) توازی عکس العمل ها

هنگامی است که تمام عکس العمل های تکیه گاهی با یکدیگر موازی باشند و سازه توان مقاومت با یک جهت نیروی وارده را نداشته باشد.

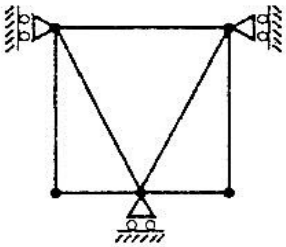
ب) تقارب عکس العمل ها

هر گاه همه عکس العمل ها در یک نقطه متقارب باشند، سازه توان مقاومت در مقابل ممان وارد به نقطه تقارب را نخواهد داشت و ناپایدار خواهد بود.

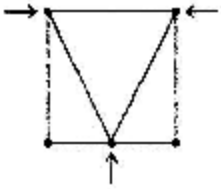
SAZE118.COM

سنجش دانش

مثال: سازه روبرو به دلیل تقارب عکس العمل ها ناپایدار است.



همانطور که مشخص است سه عکس العمل تکیه گاهی در یک نقطه متقاطع می باشند.



saze118.cocm

SAZE118.COM

نکات کلیدی فصل اول

Ÿ هر گاه درجه نامعینی منفی باشد، سازه ناپایدار خواهد بود.

Ÿ درجه نامعینی خرپای دو بعدی از رابطه زیر بدست می آید.

$$n = (R + M) - 2N$$

Ÿ درجه نامعینی قاب دو بعدی از رابطه زیر بدست می آید . در این رابطه c نماینده شرایط نیرویی اضافه (condition) می باشد.

$$n = (3M + R) - (3N + c)$$

Ÿ هر گاه در قاب تمام اعضای وارد شده به گره در مفصل شرکت کنند، $c = n - 1$ و هر گاه از n عضو ورودی به گره، p عضو در مفصل شرکت کنند، $c = p$ خواهد بود.

Ÿ در قاب ها، اعضای خمیده همانند یک عضو معمولی دارای 3 مجهول و اعضای کابلی همانند عضو دو سر مفصل می باشند.

Ÿ در ترکیب قاب و خرپای دو بعدی، می توان تمام سازه را قاب گرفته و مساله را حل کرد.

Ÿ درجه نامعینی خرپای فضایی از رابطه زیر بدست می آید.

$$n = (M + R) - 3N$$

Ÿ درجه نامعینی قاب فضایی از رابطه زیر بدست می آید.

$$n = (6M + R) - (6N - C')$$

Ÿ در محاسبه c برای قاب های فضایی به عضوهای دو سر مفصل دقت کنید.

Ÿ درجه آزادی دورانی در یک قاب، برابر تعداد دوران های مستقل می باشد.

Ÿ برای محاسبه درجه آزادی انتقال قاب هایی که درآنها دو عضو از دو تکیه گاه متفاوت به یک گره وارد نشده باشند، می توان ازرابطه زیر استفاده کرد.

Ÿ تعداد اعضایی که فاقد تغییر شکل محوری می باشند- تعداد تغییر مکان های تکیه گاهی + تعداد گره های داخلی (غیر تکیه گاهی)

$$\Delta = 2$$

Ÿ سازه ای را پایدار گویند که برای هر نوع بارگذاری روی سازه بتوان معادلات تعادل را بصورت یکتا ارضا کرد.

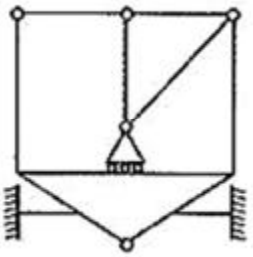
Ÿ یافتن و حذف عضوهای صفر نیرویی در خرپاها، برای یافتن مسیر انتقال نیرو و یافتن ناپایداری خرپاها بسیار مفید است.

saze118.com

SAZE118.COM

تست‌های طبقه‌بندی فصل اول

۱- درجه نامعینی سازه مقابل چقدر است؟



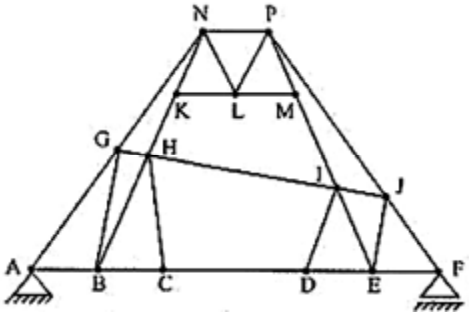
1) 6

2) 7

3) 8

4) 9

۲- خرپای شکل زیر یک سازه‌ی:



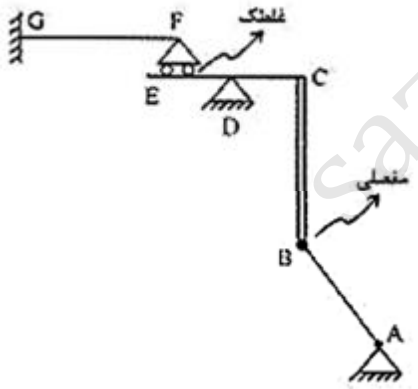
1) معین و پایدار است.

2) نامعین و پایدار است.

3) به علت داشتن شبکه‌های چهارضلعی ناپایدار است.

4) یک خرپای مرکب است که به صورت ناپایدار از ترکیب چند خرپای ساده تشکیل شده است.

۳- در مورد پایداری سازه شکل زیر می‌توان گفت:



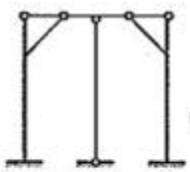
1) نامعین است.

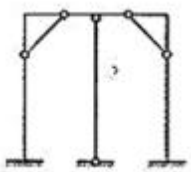
2) پایدار و معین است.

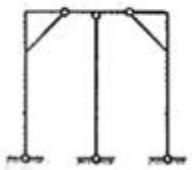
3) اگر امتداد AB از F بگذرد ناپایدار خواهد بود.

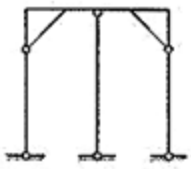
4) اگر امتداد AB از D بگذرد ناپایدار خواهد بود.

۴- کدام‌یک ا سازه‌های زیر پایدار است؟ (کلیه سازه‌ها متقارن هستند)

1) 

2) 

3) 

4) 

saze118.com

SAZE118.COM

۵- کدام مورد (موارد) زیر صحیح است؟

الف- افزایش متفاوت دما در اعضاء یک سازه نامعین باعث به‌وجود آمدن نیروهای داخلی می‌گردد.

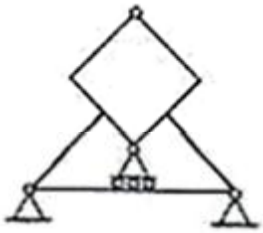
ب- افزایش متفاوت دما در اعضای یک سازه معین باعث به‌وجود آمدن نیروهای داخلی نمی‌گردد.

ج- در روش نیروها حل مسئله با نوشتن معادلات تعادل انجام می‌گیرد.

د- ماتریس نرمی وقتی متقارن است که اعضاء سازه دارای مقطع یکنواخت باشند.

1) الف　　2) الف و ب　　3) الف و ج　　4) الف و ج و د

۶- تعداد درجات نامعینی سازه مقابل را حساب کنید.



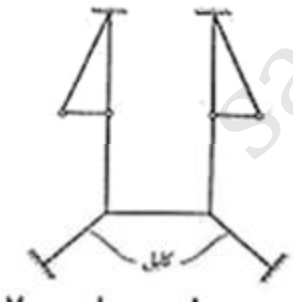
1) 4 درجه

2) 5 درجه

3) 6 درجه

4) 7 درجه

۷- درجات نامعینی سازه شکل مقابل را حساب کنید.



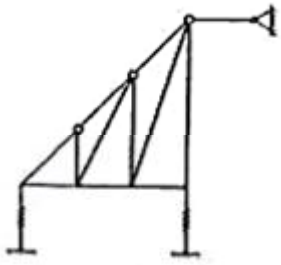
1) سه درجه

2) شش درجه

3) هفت درجه

4) یازده درجه

۸- درجات نامعینی سازه شکل مقابل را تعیین کنید؟



1) 3 درجه

2) 15 درجه

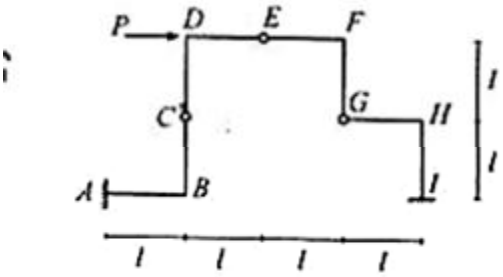
3) 9 درجه

4) 7 درجه

saze118.com

saze118.com

۹- لنگر خمشی در تکیه‌گاه I سازه شکل مقابل را محاسبه کنید؟



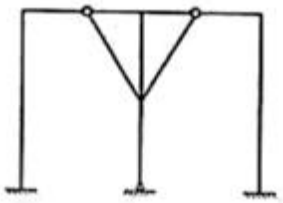
1) P L

2) 2PL

3) 3PL

4) صفر

۱۰- قاب شکل مقابل نسبت به ستون وسط متقارن است، پایداری و معینی آن را بررسی کنید.



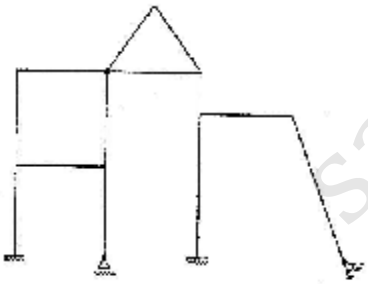
1) $n=1$ ناپایدار

2) $n=2$ پایدار

3) $n=1$ پایدار

4) $n=2$ ناپایدار

۱۱- قاب نشان داده شده در شکل چند درجه نامعین است؟



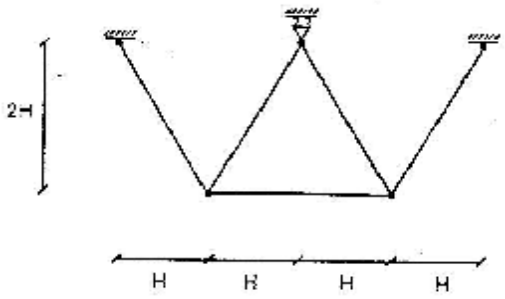
1) 6

2) 8

3) 9

4) 7

۱۲- خرپای نشان داده شده دارای مقاطع همانند است.



1) واکنش D برابر P است.

2) نیروی AB دو برابر نیروی BG است.

3) در G واکنش وجود ندارد.

4) خرپا ناپایدار است.

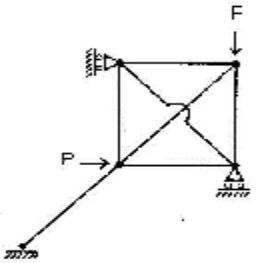
saze118.com

SAZE118.COM

۱۳- یک قاب دو بعدی مستطیلی با تکیه گاه های گیردار دارای N دهانه و M طبقه است. اگر s دهانه سازه تا بالا دارای بادبند ضربدری باشد، درجه نامعینی قاب برابر است با .

1) $3M(N+S)$ 2) $M(3N+2S)$ 3) $2M(N+S)$ 4) $M(2N+3S)$

۱۴- برای یافتن نیروهای داخلی خرپای مستوی زیر کدام گزینه درست تر است؟



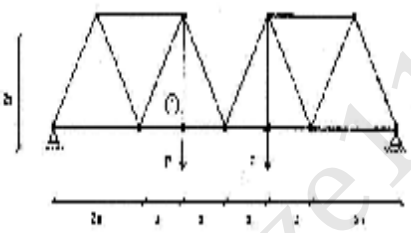
1) با روش سازگاری تغییر شکل ها پاسخ یگانه پیدا می شود.

2) نمی توان نیروهای داخلی منحصر به فرد خرپا را بدست آورد.

3) با ترکیب روش نیروها و تغییر مکان ها می توان به پاسخ یگانه دست یافت.

4) تحلیل با روش تغییر مکان ها ساده تر از روش نیروها انجام می شود.

۱۵- در خرپای روبرو اگر هر دو تکیه گاه B,A مفصل باشند مقدار نیروی داخلی عضو ۱ را تعیین کنید



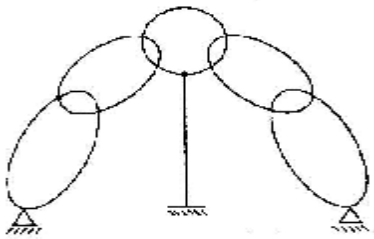
1) $S_1 = 0$

2) $S_1 = P$

3) $S_1 = 2P$

4) خرپا ناپایدار است.

۱۶- درجه نامعینی سازه دو بعدی زیر کدام است؟



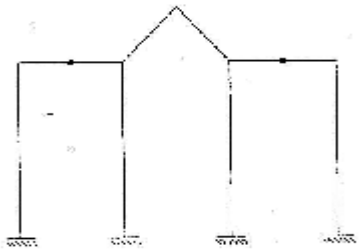
1) 22

2) 24

3) 26

4) 28

۱۷- درجه آزادی دورانی و درجه آزادی انتقالی سازه زیر در حالات بارگذاری عمومی کدام است؟ (از تغییر طول محوری صرفنظر شود).



1) 5 و 2

2) 5 و 4

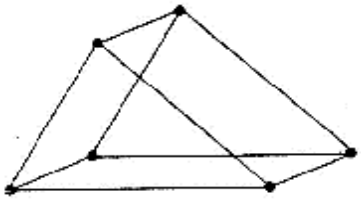
3) 9 و2

4) 9و4

saze118.com

saze118.com

۱۸- خرپای مسطحه زیر ..... است.



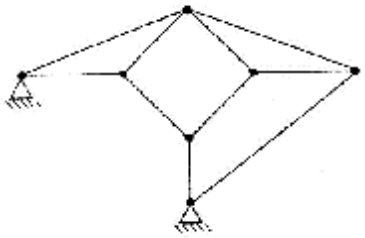
1) معین و پایدار

2) معین و ناپایدار

3) نامعین و پایدار

4) نامعین و ناپایدار

۱۹- سازه مفصلی مطابق شکل روبرو



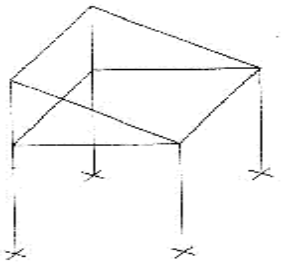
1) ایزواستاتیک و ناپایدار است

2) ایزواستاتیک و پایدار است

3) هیپراستاتیک و پایدار است

4) هیپراستاتیک و ناپایدار است

۲۰- درجه نامعینی قاب سه بعدی روبرو کدام است؟



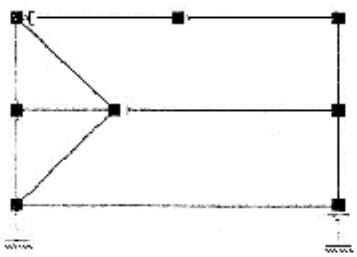
1) 24

2) 30

3) 42

4) 48

۲۱- درجه نامعین سازه روبرو برابر است با :



1) 2 درجه

2) 3درجه

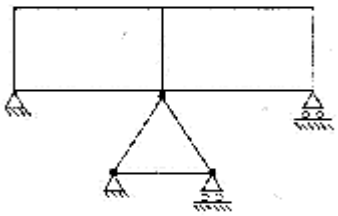
3) 3 درجه

4) 5 درجه

saze118.com

SAZE118.COM

۲۲- درجه نامعین سازه مقابل را حساب کنید.



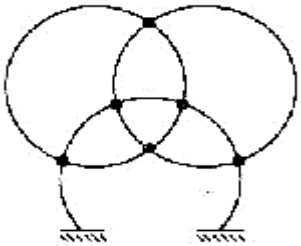
1) 7

2) 8

3) 9

4) 12

۲۳- درجه نامعین سازه شکل مقابل چند است؟



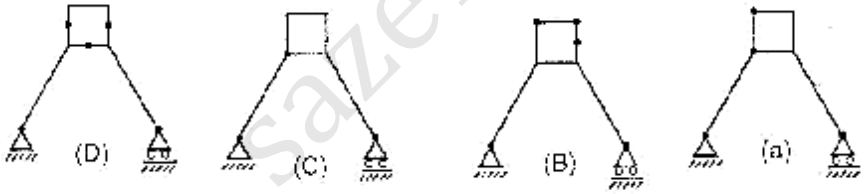
1) دو

2) سه

3) چهار

4) پنج

۲۴- کدام سازه ها معین و پایدار است.



1) c,d

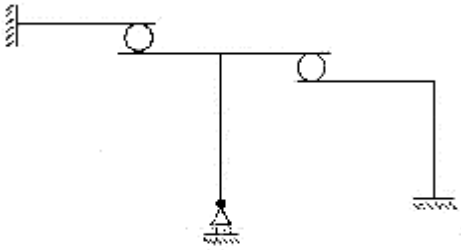
2) b,a

3) a,c

4) d,b

d , b (۴ a , c (۳ b, a (۲

۲۵- چگونگی حالت معین و پایداری سازه مقابل، به ترتیب کدام است.



1) معین ، ناپایدار

2) معین، پایدار

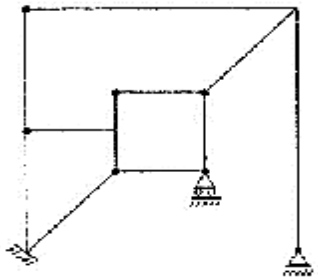
3) نامعین، پایدار

4) نامعین، پایدار

saze118.cocm

saze118.com

۲۶- درجه نامعینی شکل روبرو کدام است؟



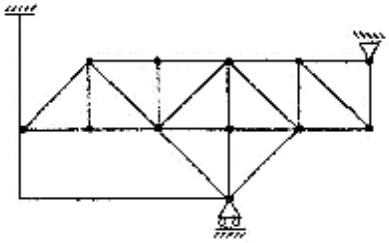
1) 2

2) 3

3) 4

4) 5

۲۷- درجه نامعینی سازه مقابل کدام است؟



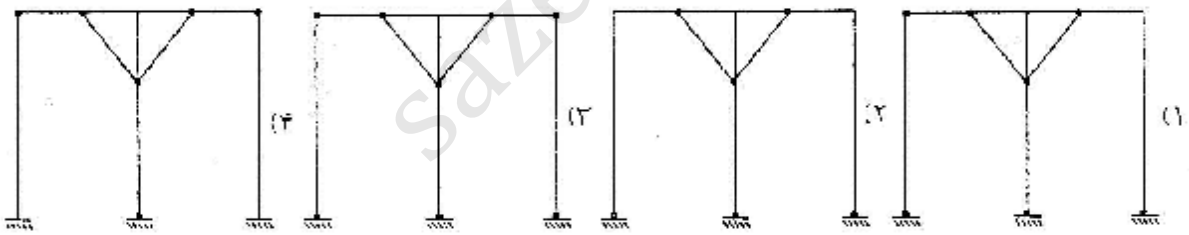
1) 3

2) 4

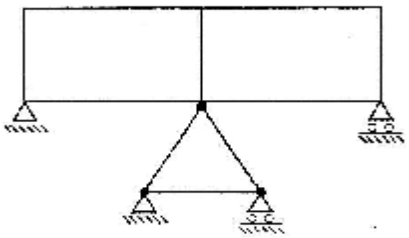
3) 5

4) 6

۲۸- کدامیک از قابهای متقارن پایدار است؟



۲۹- سازه شکل مقابل چند درجه نامعین است؟



1) 6 درجه

2) 7 درجه

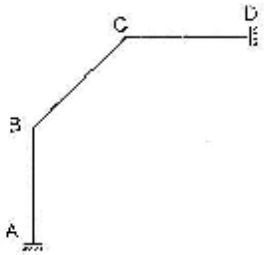
3) 8 درجه

4) 10 درجه

saze118.com

SAZE118.COM

۳۰- سازه شکل مقابل کلاً چند Δ مستقل دارد؟ (جابجایی هر گره: Δ)



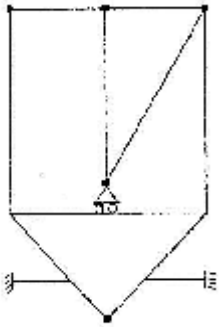
1) صفر

2) یکی

3) دو

4) سه

۳۱- درجه نامعینی سازه مقابل چقدر است؟



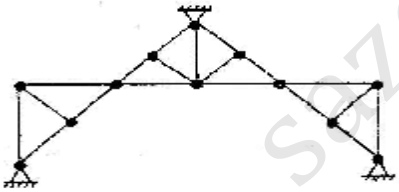
1) 6

2) 7

3) 8

4) 9

۳۲- خرپای مقابل :



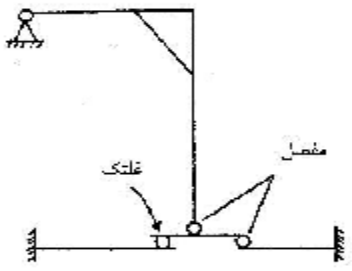
1) ناپایدار است

2) پایدار و معین است

3) پایدار و 2 درجه نامعین است

4) پایدار و 3 درجه نامعین است

۳۳- درجه نامعینی سازه زیر را تعیین کنید.



1) 3

2) 4

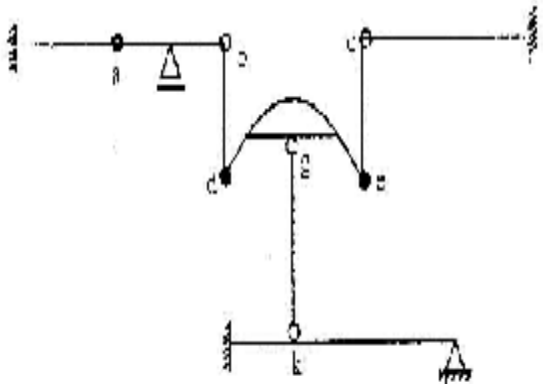
3) 5

4) 6

saze118.com

saze118.com

۳۴- در مورد پایداری و معین بودن سازه شکل زیر می توان گفت:



1) سازه ناپایدار است

2) سازه معین است

3) سازه 2 درجه نامعین است

4) سازه پایدار و 5 درجه نامعین است

saze118.cocm

SAZE118.COM

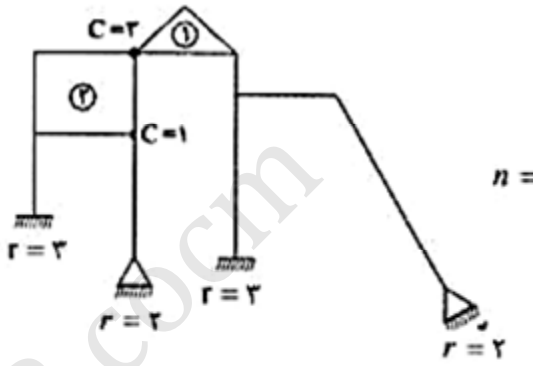
پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- گزینه «۱»

با استفاده از رابطه 1-4 برای 4 حلقه بسته داریم:

(s در حالت دو بعدی برابر 3 است.)

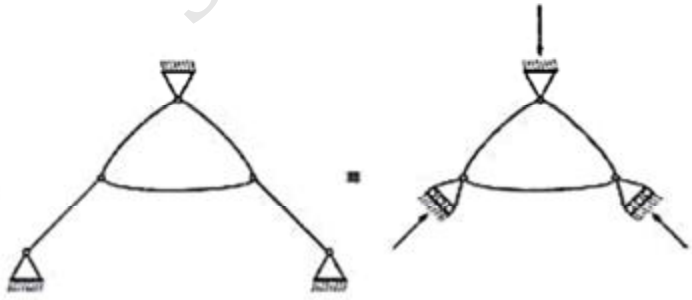
$$n=(3\times4+6)-(3+9)=6$$



(تعداد رابطه شرطی غلتک برابر 2 در نظر گرفته می‌شود.)

۲- گزینه «۱»

با ترسیم مدل جسم صلب سازه ملاحظه می‌شود که این خرپا، ترکیبی از 2 خرپای ساده است که با سه میله غیرموازی به یکدیگر متصل شده‌اند. بنابراین سازه پایدار است.



برای تعیین درجه نامعینی، با استفاده از رابطه 1-6 خواهیم داشت:

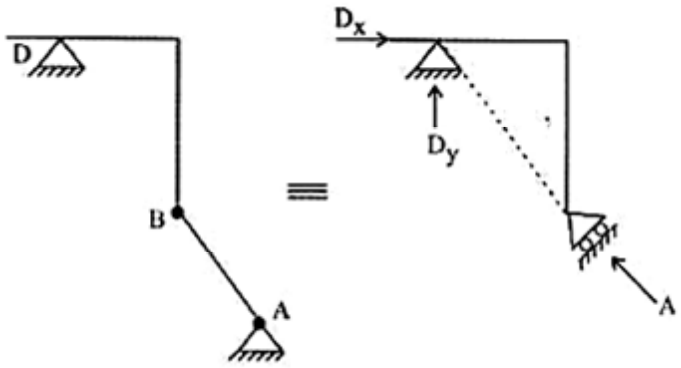
$$n=(27+3)-2(15)=0$$

بنابراین سازه، معین و پایدار است و گزینه «1» پاسخ صحیح می‌باشد.

۳- گزینه «۴»

SAZE118.COM

قسمت سمت راست سازه را جدا می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که با جایگزینی میله دو سر مفصل AB با یک تکیه‌گاه غلتکی، در صورتی که امتداد آن از تکیه‌گاه D بگذرد، عکس‌العمل‌های سازه، در یک نقطه متقاطع خواهند بود و سازه ناپایدار می‌گردد.



۴- گزینه «۱»

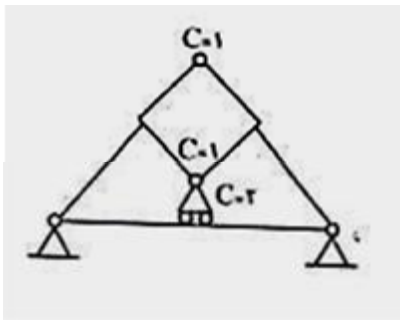
با جایگزینی اعضای دو سر مفصل، با تکیه گاه غلتکی ملاحظه می‌شود که سازه‌های شماره 2 تا 4 به دلیل وجود سه تکیه‌گاه غلتکی، ناپایدار بوده و بنابراین گزینه «1» پاسخ صحیح است.

۵- گزینه «۲»

۶- گزینه «۳»

با استفاده از رابطه 4-1 و برای سه حلقه بسته داریم:

$$n=(3\times3+4)-(3+4)=6$$



۷- گزینه «۳»

تعداد اعضا $m=11$

تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی $r=2\times3+2\times2=10$

تعداد گره‌ها $j=10$

تعداد معادلات شرط $C=6$

SAZE118.COM

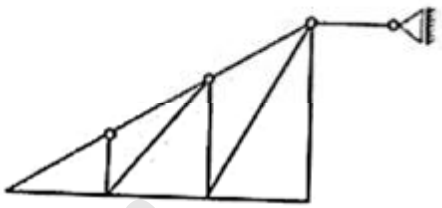
درجه نامعینی ساده $= (3m + r) - (3j + c) = 43 - 36 = 7$

۸- گزینه «۴»

با استفاده از جدول 1-2 جایگزین فنرها را رسم می‌کنیم.

$m = 12 \quad , \quad r = 3 \quad , \quad j = 8 \quad , \quad c = 8$

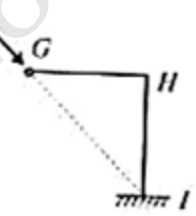
$n = (3m + r) - (3j + c) = 7$



۹- گزینه «۴»

با توجه به مفصل بودن G , E و با جدا نمودن GHI از سازه، نیروی موجود در G در امتداد EG خواهد بود که راستای آن از I هم می‌گذرد و در نتیجه لنگری در I به‌وجود نمی‌آید.

$\sum M_I = 0 \Rightarrow \boxed{M_I = 0}$



۱۰- گزینه «۴»

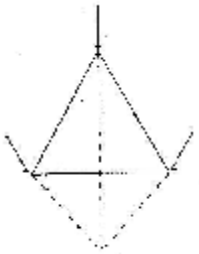
از آنجایی که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از یک نقطه می‌گذرد لذا قاب ناپایدار است و $n = 2$.

11- گزینه (3) صحیح است

$M = 13, R = 10, N = 12, C = 3 + 1 = 4$

$\Rightarrow n = (13 \times 3 + 10) - (12 \times 3 + 4) = 9$

12- گزینه (4) صحیح است.



خرپای داخلی به دلیل تقارب عکس العمل ها دارای ناپایداری هندسی خارجی است.

13- گزینه (2) صحیح است.

saze118.com

SAZE118.COM

با توجه به صورت مساله خواهیم داشت:

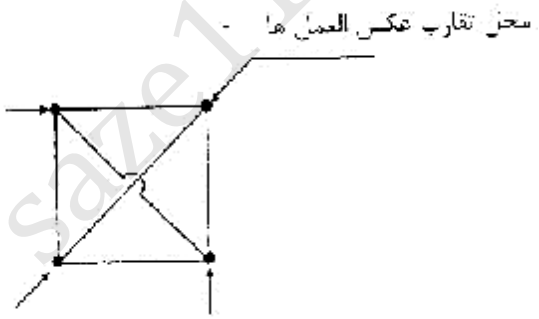
برای راحتی کار بد نیست مثالی از قاب کوچک برای خود بزنید.

$$M = M(N+1) + MN + 2MS$$
$$R = 3(N+1)$$ دو سر بادبندها دو سر مفصل است
$$C = 4MS \rightarrow$$

$$N = (M+1)(N+1)$$
$$\Rightarrow n = (3M+R) - (3N+C) = [6MN + 3M + 6MS + 3N + 3]$$
$$-[3MN + 3M + 3N + 3 + 4MS]$$
$$\Rightarrow n = 3MN + 2MS = M(3N+S)$$

14- گزینه (2) صحیح است.

خرپا به دلیل تقارب عکس العمل ها دارای ناپایداری هندسی خارجی است و نمی توان نیروهای منحصر بـه فـردی بـرای آن تعیین کرد.



15- گزینه (4) صحیح است.

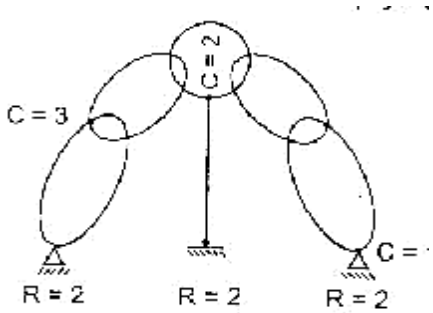
با کمی دقت متوجه می شویم که طریقه قرار گرفتن دو خرپا کنارهم همانند دو تیر مقابل می باشد و بنابراین ناپایـداری هندسی داخلی داریم.

16- گزینه (2) صحیح است.

همانطور که گفته شده اعضای خمیده را هم مثل اعضای غیر خمیده در نظر می گیریم.

SAZE118.COM

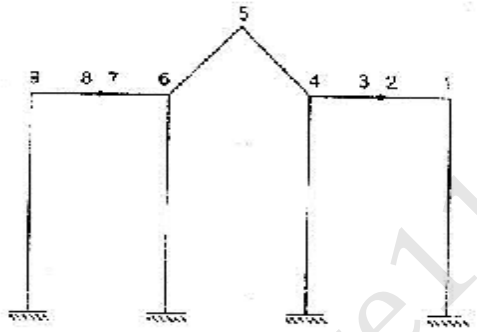
$$M=20, R=6, N=12, C=6$$
$$\Rightarrow n=(3M+R)-(3N+C)$$
$$\Rightarrow n=(3\times 20+6)-(3\times 12+6)=24$$



17- گزینه (4) صحیح است.

درجه آزادی دورانی از راست به چپ شماره گذاری شده است $\Leftarrow q=9$

چون سازه ، سازه معمولی می باشد از رابطه ارائه شده برای درجه آزادی انتقالی استفاده می کنیم.



$$\Delta=2\times 7+\mathbf{0}-10=4$$

18- این سوال دارای دو اشکال است. یکی اینکه تکیه گاه ها داده نشده اند. دوم اینکه در خرپای ناپایدار معینی و نامعینی مفهومی ندارد.

توجه: در برخورد با سوالات مشکل داردر کنکور به راحتی از کنار آن ها بگذرد.

19- گزینه (2) صحیح است.

$$M=10, R=4, N=7 \Rightarrow n=10+4-2\times 7=\mathbf{0}$$

همچنین سازه پایدار می باشد.

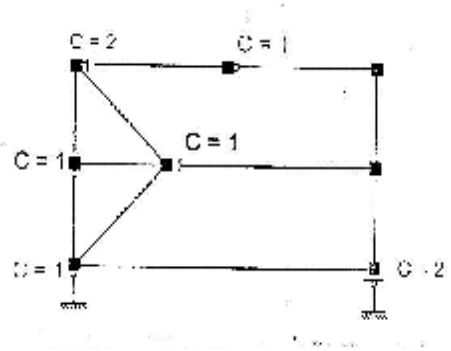
20- گزینه (3) صحیح است.

$$M=13, R=4\times 6=24, N=10, C=\mathbf{0}$$
$$\Rightarrow n=(13\times 6+24)-(10\times 6)=42$$

saze118.com

SAZE118.COM

21- گزینه (3) صحیح است.

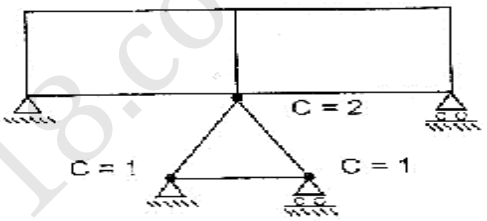


$M = 12, R = 6, N = 10, C = 8$

$\Rightarrow n = (12\times 3 + 6) - (10\times 3 + 8) = 4$

22- گزینه (2) صحیح است.

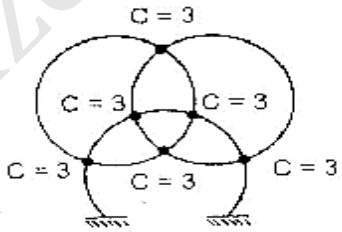
ترکیب قاب و خرپا است. بنابراین می توانیم تمام سازه را قاب فرض کنیم.



$M = 10, R = 6, N = 8, C = 4$

$\Rightarrow n = (10\times 3 + 6) - (8\times 3 + 4) = 8$

23- گزینه (2) صحیح است.

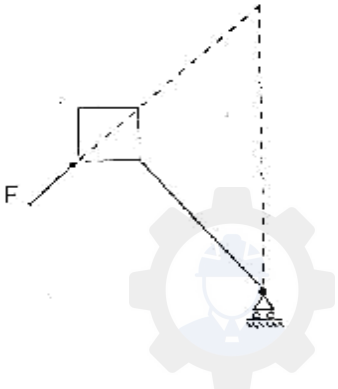


$M = 13, R = 6, N = 8, C = 6\times 3 = 18$

$\Rightarrow n = (13\times 3 + 6) - (3\times 8 + 18) = 3$

24- گزینه (4) صحیح است.

به راحتی می توان سازه های c,a را به دلیل ناپایداری از گزینه ها خارج کرد.

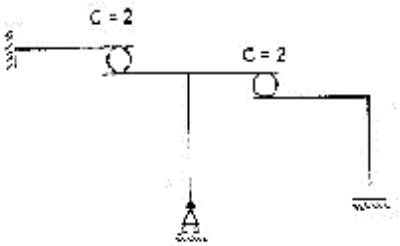


SAZE118.COM

سازه به دلیل تقارب عکس العمل ها دارای ناپایداری هندسی خارجی است.

25- گزینه (4) صحیح است.

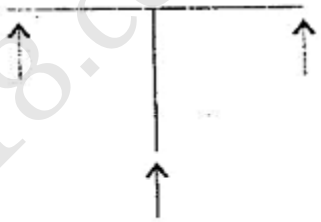
به دلیل توازی عکس العمل ها، سازه ناپایداری هندسی خارجی دارد.



اصولاً سازه ناپایدار، نامعین نیز می باشد زیرا می توان نیروهای داخلی آن را تعیین کرد در حالی که بـا شـمارش، درجـه نامعینی این سازه برابر صفر خواهد بود.

$M = 6, R = 7, N = 7, C = 4$

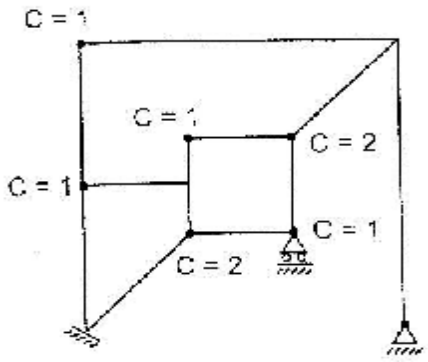
$\Rightarrow n = (3\times 6 + 7) - (3\times 7 + 4) = \mathbf{0}$



26- گزینه (3) صحیح است.

$M = 12, R = 6, N = 10, C = 8$

$\Rightarrow n = (12\times 3 + 6) - (10\times 3 + 8) = 4$



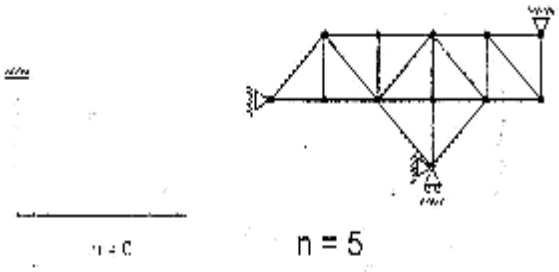
saze118.com

saze118.com

27- گزینه (3) صحیح است.

یک راه حل این است که تمام سازه ها را به صورت قاب دو بعدی بگیریم که این راه طولانی است و پر اشتباه

راه دوم: جدا سازی سازه به دو قطعه.

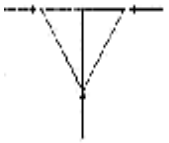


$\Rightarrow$ کل $n = 0 + 5 = 5$

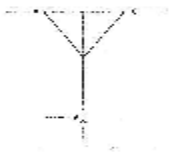
28- گزینه (1) صحیح است.

دلیل رد شدن هر کدام از گزینه ها را بررسی می کنیم.

گزینه سازه دارای ناپایداری هندسی داخلی است.

گزینه  سازه دارای ناپایداری هندسی داخلی است

و گزینه 4:



اما گزینه 1 این مشکل را ندارد.

البته قاب گزینه 1 متقارن نمی باشد!

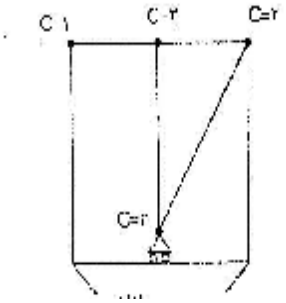
29- گزینه (3) صحیح است.

حل این سوال همانند مساله 12 می باشد.

30- گزینه (2) صحیح است .

SAZE118.COM

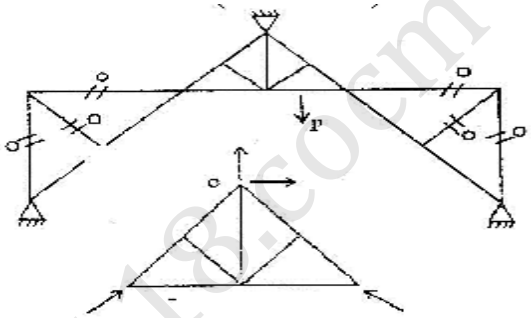
به دلیل مایل بودن عضور BC ، جابجایی افقی B و قائم C بـه یکـدیگر مربـوط مـی شـوند. بنـابراین یـک درجـه آزادی جابجایی مستقل خواهیم داشت.



31- گزینه (1) صحیح است

$$M=14, N=11, R=6, C=9$$
$$n=(3M+R)-(3N+C)$$
$$=(3\times14+6)-(3\times15+9)=6$$

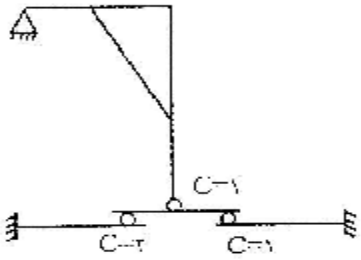
32- گزینه (1) صحیح است . فرض کنید در مثلث بالایی بارگذاری داشته باشید.



نیروها در **0** همرسند. بنابراین چنان چه بار گذاری از **0** نگذرد، سازه ناپایداری خواهد بود.

33- گزینه (2) صحیح است.

$$M=8, R=8, N=9, C=4$$
$$\Rightarrow n=(9\times3+8)-(9\times3+4)=4$$



34- گزینه (1) صحیح است . قطعه منحنی شکل d g e با سه عضو عمودی به بقیه سازه وصل شده بنابراین در برابر بار افقی ناپایدار خواهد بود.

SAZE118.COM

فصل دوم – تحلیل استاتیکی سازه‌های معین

همان‌طور که در فصل قبل نیز اشاره شد، تحلیل سازه‌های معین، تنها با استفاده از روابط استاتیکی، امکان‌پذیر است.

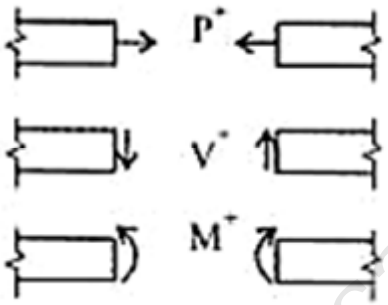
مواردی که در تحلیل یک سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد، عبارتند از: عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی.

نیروهای داخلی اعضای یک سازه عبارتند از نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی، در خرپاها تنها نیروی داخلی، نیروی محوری است.

در درس استاتیک نحوه تعیین این پارامترها را آموخته‌ایم. برای تعیین این پارامترها در حالت دوبعدی، کافی است از روابط $\sum M=0$, $\sum F_y=0$, $\sum F_x=0$ استفاده نماییم.

با داشتن مقادیر و جهت نیروها در چند مقطع مناسب، می‌توان نمودار تغییرات نیروهای داخلی را در طول تیر رسم نمود.

جهت‌های قراردادی مثبت برای نیروهای مختلف به شرح زیر هستند:



الف) نیروی محوری وقتی مثبت است که به صورت کششی باشد.

ب) نیروی برشی وقتی مثبت است که هر مقطع بریده شده را در جهت ساعتگرد بچرخاند.

ج) لنگر خمشی وقتی مثبت است که تار پایینی تحت کشش قرار بگیرد.

بین بار گسترده q و نمودار نیروی برشی در قطعه‌ای به طول X، رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{dV}{dx}=q \qquad (1\text{-}2)$$

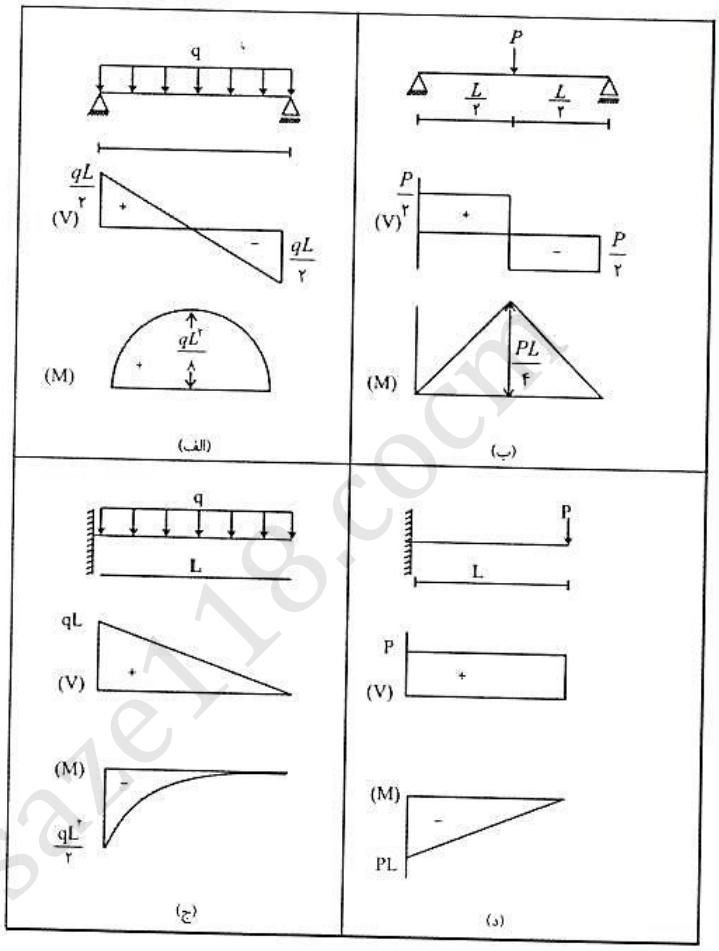
در مورد لنگر خمشی و نیروی برشی نیز داریم:

$$\frac{dM}{dx}=V \qquad (2\text{-}2)$$

saze118.com

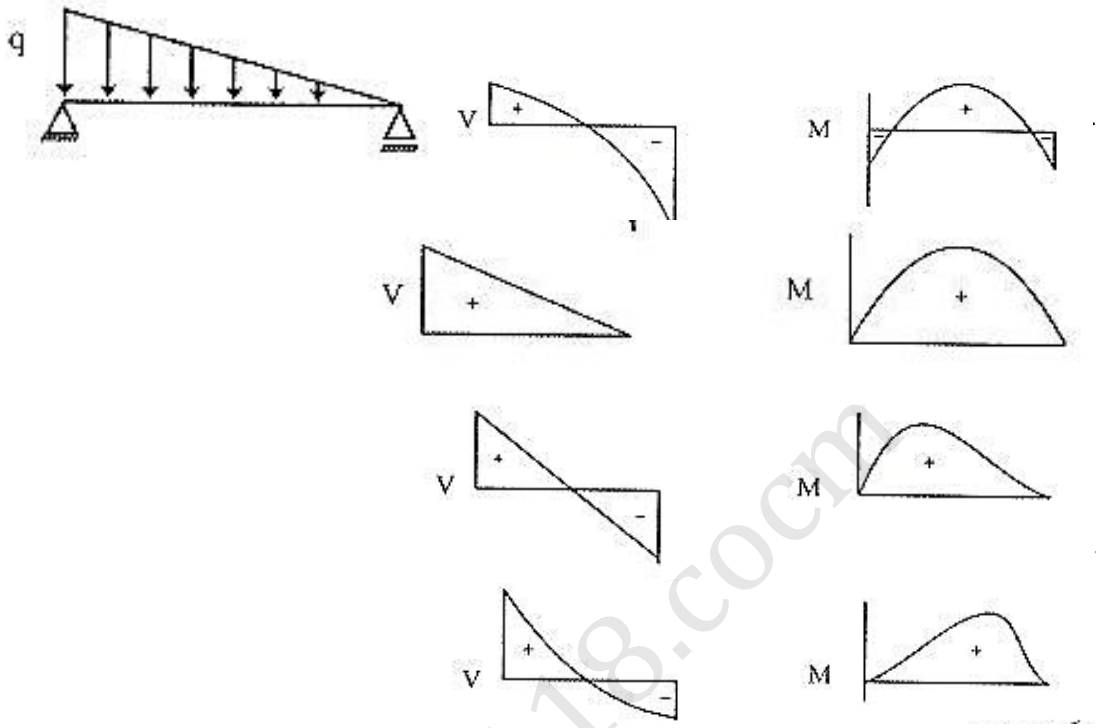
SAZE118.COM

در نواحی که لنگر خمشی منفی است، تیر به‌صورت گنبدی شکل و در نواحی که لنگر خمشی مثبت است، تیر به‌صورت کاسه‌ای شکل درمی‌آید. در شکل 2-1، نمودار لنگر و برش برای برخی حالات متداول تیرها آورده شده است.



saze118.com

مثال ۱: نمودار برش و لنگر تیر مقابل، کدام است؟



حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به اینکه q خطی است، نمودار V یک تابع درجه دوم است و نمودار M تابع درجه سوم است. همچنین برش در تکیه‌گاه سمت چپ، بیش از تکیه‌گاه سمت راست است و مقدار لنگر در مفصل‌ها برابر صفر است.

2-1- خرپا

خرپا سازه ای است متشکل از اعضاء دو سر مفصل هر عضو خرپا می تواند نیرویی به صورت کششی و یا فشاری تحمل کند. قرارداد اینست که نیروی کششی را با علامت مثبت و نیروی فشاری را با علامت منفی نشان می دهند. نیروهای خارجی وارد به خرپا ، در مفصل وارد می شوند.

۲-۱-۱- انواع خرپا

انواع خرپا و راه حل های مناسب برای حل هر کدام از آنها در زیر بیان می شود.

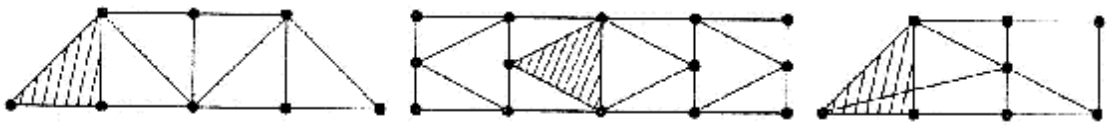
۲-۱-۱-۱- خرپای ساده

دارای یک مثلث پایه است که با اضافه کردن مداوم دو عضو غیر هم امتداد که در یک سر به هم مفصل بوده و سر دیگر هر کدام به مفصل های قبلی وصل است می تواند به شکل های مختلفی در آید.

SAZE118.COM

چند نمونه خرپای ساده را در زیر مشاهده می کنید:

(مثلث پایه با هاشور مشخص شده است)



نکته: لازم نیست دو عضو جدیدی که به خرپا اضافه می شوند، همراه دیگر عضوها تشکیل مثلث جدیدی بدهند. دو خرپا از سه خرپای بالا دارای این ویژگی می باشند.

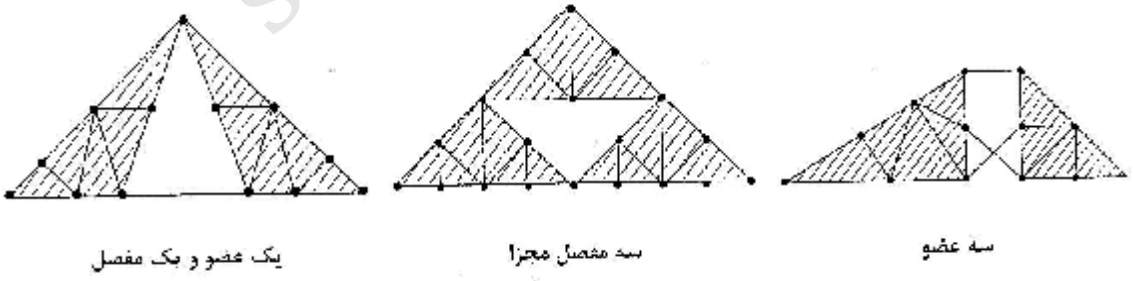
برای حل خرپای ساده می توان از روش گره استفاده کرد. در صورتی که نیروی یک عضو خاص را بخواهیم روش مقطع زدن نیز بسیار مفید خواهد بود. خرپای ساده در صورتی که به صورت پایدار به تکیه گاه ها متصل باشد، پایدار است.

۲-۱-۱-۲- خرپای مرکب

از اتصال دو یا چند خرپای ساده به صورت پایدار به یکدیگر ایجاد می گردد. انواع این اتصال می تواند سه عضو غیر موازی و غیر متقاطع، یک عضو و یک مفصل ، سه مفصل مجزا و... باشد.

چند نمونه خرپای مرکب را در زیر مشاهده می کنید:

(خرپاهای ساده با هاشور مشخص شده اند)



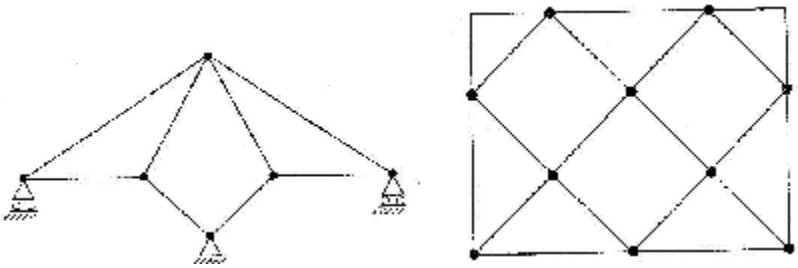
خرپای مرکب را می توان با جدا کردن خرپاهای ساده از یکدیگر و با روش مقطع زدن به قسمت های مجزا تقسیم کرده و سپس با روش گره حل کرد.

۲-۱-۱-۳- خرپای بغرنج

خرپاهایی که درگروه خرپاهای ساده و یا خرپاهای مرکب جای نگیرند را بغرنج می گوییم.

چند نمونه خرپای بغرنج در زیر آورده شده است:

SAZE118.COM



خرپاهای بغرنج را می توان با زدن مقطع های مناسب حل کرد. از روش های دیگر حل خرپاهای بغرنج اینست که یکی از اعضاء را مجهول گرفته، خرپا را حل کنید تا مجهول بدست آید. خرپاهای بغرنج از روش هنبرگ نیز قابل حلند.

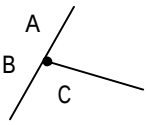
۲-۱-۲- تحلیل خرپای معین

در این بخش هدف بدست آوردن نیروی اعضاء مختلف خرپای معین می باشد.

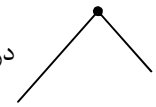
۲-۱-۲-۱- روش گره

در هر گره از خرپا می توان دو شرط تعادل ، $\sum F_y = 0, \sum F_x = 0$ ، را نوشت که با تشکیل این معادلات می توان خرپا را حل کرد.

نکته: اولین گام در حل خرپا پس ازبدست آوردن نیروهای تکیه گاهی، مشخص کردن اعضای صفر نیرویی است . این اعضاء درگره های بدون بارگذاری یافت می شوند که در دو شکلند:

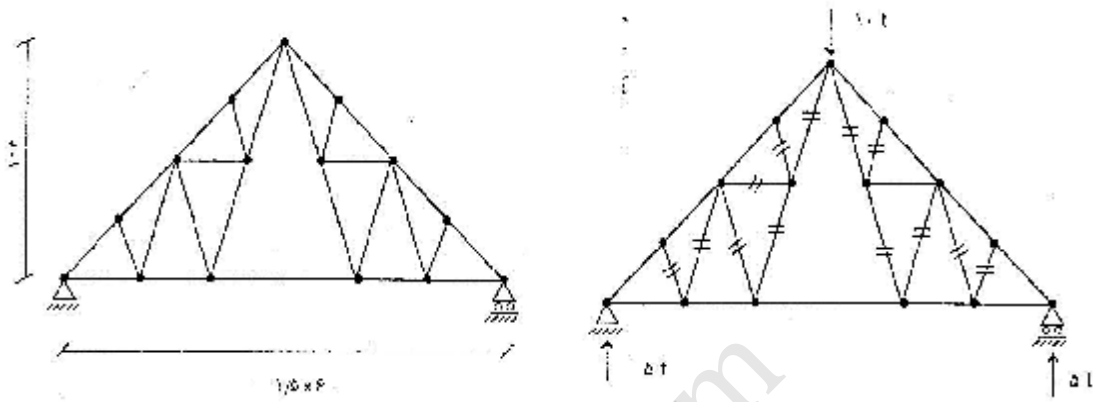
الف 

در این حالت اگر تعادل نیرویی در راستای عمود بر راستای اعضای B,A را بنویسیم، نیروی عضو C برابر صفر بدست می آید.

ب)  در این حالت با نوشتن دو معادله $\sum F_y = 0, \sum F_x = 0$ به این نتیجه می رسیم که نیروی هر دو عضو برابر صفر است.

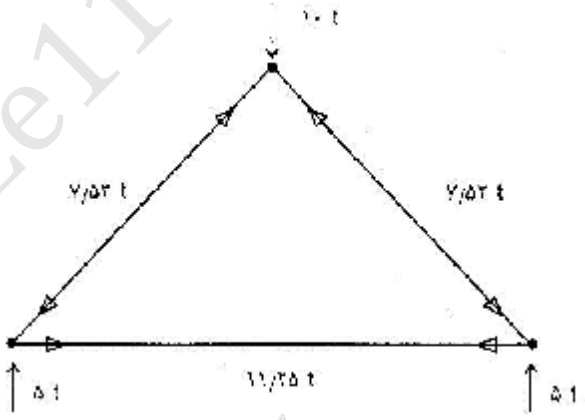
SAZE118.COM

مثال: خرپای مقابل را حل کنید.



اعضاء صفر نیرویی را حذف می کنیم.

همانطور که می بینیم با حذف اعضاء صفر نیرویی، حل مساله بسیار ساده می شود. اعضاء صفر نیرویی با // نشان داده شده اند.



۲-۱-۲-۲- روش مقطع زدن

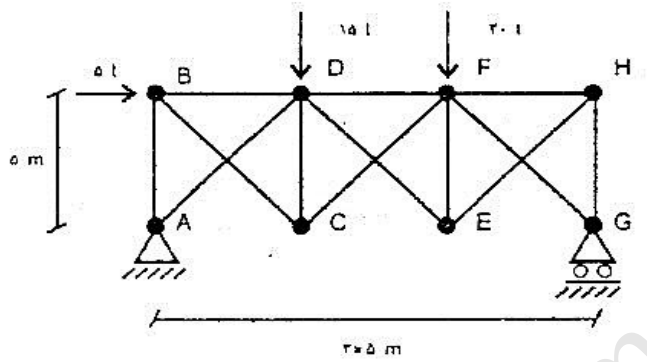
در این روش قسمتی از خرپا را با زدن مقطع مناسب جدا کرده و با نوشتن شرایط تعادل در این قسمت جدید نیروی عضو مورد نظر بدست می آید.

این روش هنگامی که نیروی یک عضو خاص مورد نیاز باشد بسیار مفید خواهد بود.

saze118.com

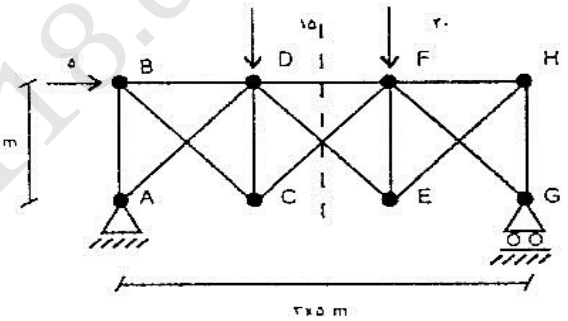
SAZE118.COM

مثال: نیروی عضو DE را بدست آورید. (DE=a)



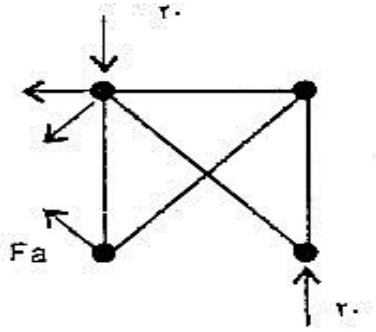
ابتدا عکس العمل تکیه گاهی را تعیین می کنیم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 15 \times R_G = 5 \times 5 + 15 \times 5 + 2010$$
$$\Rightarrow R_G = 20t \uparrow$$



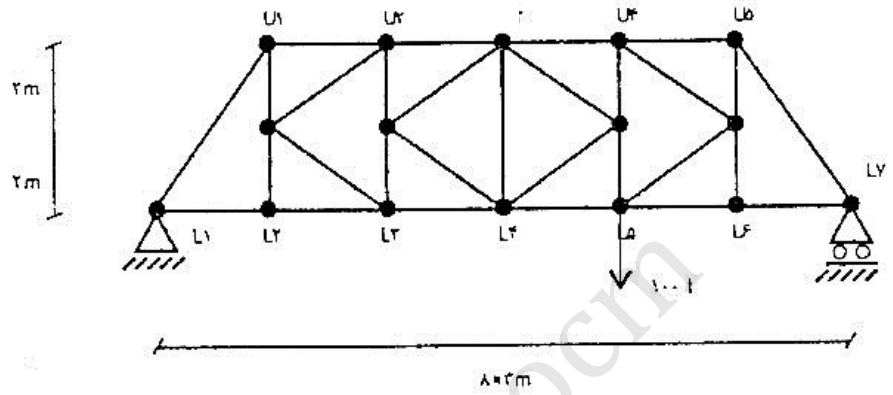
از محل نشان داده شده قطع می زنیم و با نوشتن تعادل ممان حول F ، نیروی عضو a بدست می آید.

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow F_a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 5 = 5 \times 20 \Rightarrow F_a = 20\sqrt{2}t$$



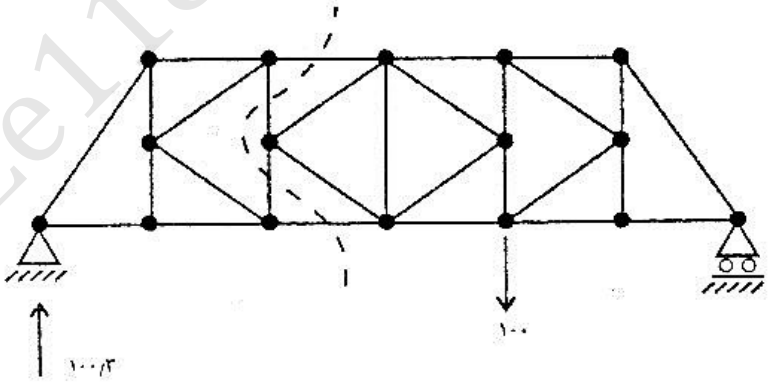
SAZE118.COM

مثال: نیروی عضو u_2u_3 را بدست آورید.



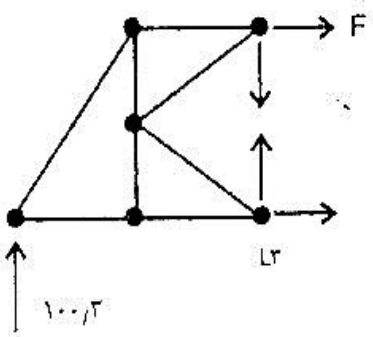
ابتدا نیروی تکیه گاهی را بدست می آوریم.

$$\sum M_{L_7}=0 \Uparrow R_{L_1}=\frac{100}{3}\uparrow$$



حال از مسیر نشان داده شده برش زده و بانوشتن تعادل ممان حول L_3 مساله حل خواهد شد.

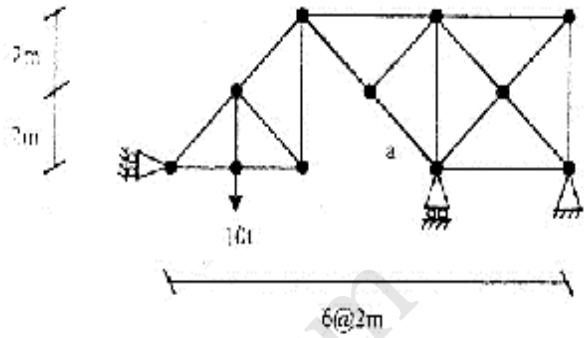
$$\sum M_{L_3}=0 \Rightarrow 4\times F+6\times\frac{100}{3}=0 \Rightarrow F=-50t$$ فشاری



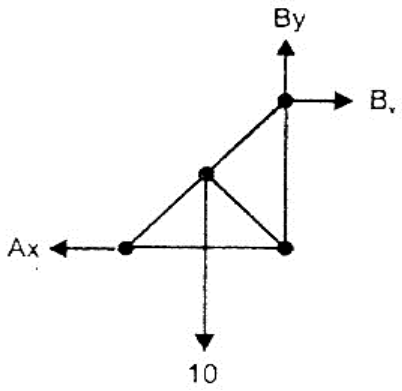
SAZE118.COM

برای حل خرپا روش های دیگری نیز وجود دارد که کمتر مورد استفاده قرار می گیرند.

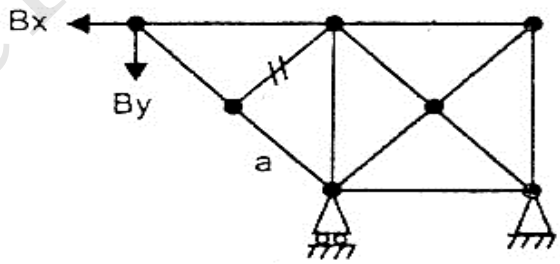
مثال: نیروی عضو a از خرپای مقابل را بدست آورید.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 4 \times A_x = 10 \times 2 \Rightarrow A_x = 5$$
$$\Rightarrow B_x = 5, B_y = 10$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow a\frac{\sqrt{2}}{2} = By = 5$$
$$\Rightarrow a = 5\sqrt{2}$$



۲-۱-۳- تغییر شکل استاتیک خرپا

در این بخش هدف تعیین جابجایی نقاط مختلف خرپاف تحت تاثیر نیروهای وارد به خرپا می باشد.

کار مجازی - بارواحد

روش کار مجازی یا بار واحد برای یافتن تغییر شکل سازه ها به کارمی رود و به صورت زیر بیان می گردد:

کار مجازی یک مجموعه از نیروهای خارجی که به طور تدریجی به سازه وارد می شوند با انرژی الاستیک داخلی ایجاد شده در سازه برابر است.

saze118.com

SAZE118.COM

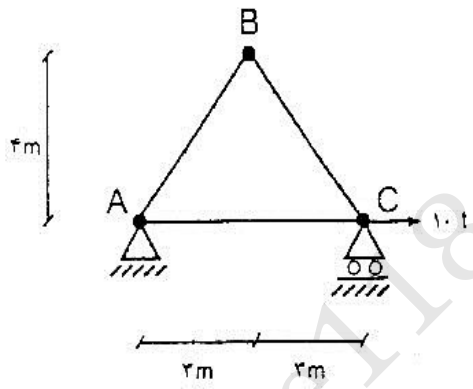
سازه ای را در نظر بگیرید که تحت اثر یک بار گذاری قرار دارد. هر گاه به هر صورت تغییر شکل در سازه ایجاد کنیم ، براساس اصل انرژی، کار انجام شده بر اثر نیروهای خارجی باید برابر با انرژی ذخیره شده در سازه باشد. $w_{ext} = w_{\text{int}}$

این تغییر شکل در سازه می توان تحت اثرنیروهای وارد بر سازه، تغییر دما، بلند یا کوتاه کردن یک عضو و یا ... باشد.

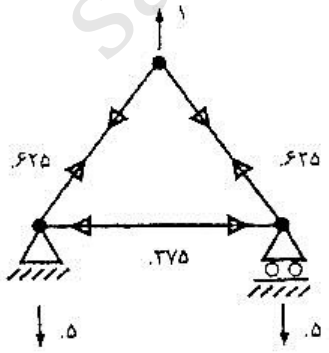
با استفاده از اصل انرژی، روشی برای بدست آوردن جابجایی نقاط مختلف سازه تحت اثر بارهای وارده به نام روش بار واحد ابداع گردیده است که با حل یک مثال تشریح می گردد.

مثال: جابجایی عمودی گره B را تحت اثر بار وارده بدست می آورید.

($EA = 5\times10^{7}\,Kg$ برای کلیه اعضاء)



برای حل این مساله ابتدا سازه را تحت تأثیر بار واحدی در نقطه مزبور در راستای مورد نظر قرار می دهیم و نیروی اعضای مختلف سازه را بدست می آوریم.

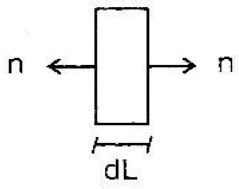


حال بار واقعی وارد بر سازه، که می خواهیم تغییر مکان ناشی از آن را بدست آوریم، را به این سازه وارد می کنیم و اصل انرژی را برای خرپا می نویسیم.

کار خارجی انجام شده $w_{ext} = 1\times\Delta$

کار خارجی انجام شده برابر مقدار فوق خواهد شد زیرا دو نیروی خارجی 0/5 در تکیه گاه جابجایی نخواهند داشت. حال کافی است انرژی داخلی ذخیره شده را محاسبه کرده و برابر مقدار فوق قرار دهیم.

SAZE118.COM



المانی به طول dL را در نظر بگیرید که نیروی کشتن n به دو طرف آن وارد میشود.

تغییر طول این المان تحت اثر نیروهای واقعی وارد بر سازه برابر خواهد بود با :

$$\Delta = \frac{NdL}{EA}$$

که در آن، N نیروی ناشی از بارگذاری واقعی در این المان می باشد بنابراین انرژی ذخیره شده در این المان برابر ، جابجایی دو نیروی n× نیروی n، خواهد بود.

$$dw = n \times \Delta = \frac{nNdL}{EA}$$

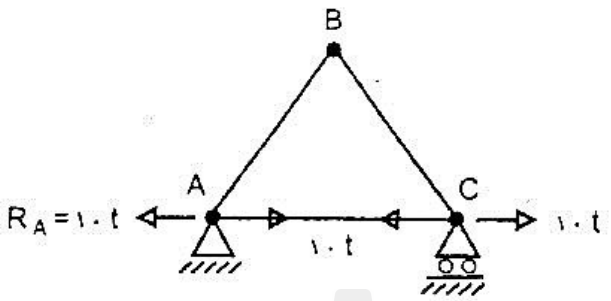
هر گاه در طول عضو روی المانها انتگرال بگیریم انرژی ذخیره شده در یک عضو برابر خواهد شد با :

$$w_i = \frac{n_i N_i L_i}{EA_i}$$

و بنابراین انرژی کل ذخیره شده در خرپا برابر خواهد شد با :

$$w_{\text{int}} = \sum \frac{n_i N_i L_i}{EA_i}$$

حال به حل مساله بر می گردیم، nها را داریم کافی است N ها را هم بدست آوردیم.



SAZE118.COM

عضو	n	N	L		w_i
AB	0/625	0	5m		0
BC AC	0/625	0	5m		0
	-0/375	10t	6m	$-\mathbf{0,0}45cm$	$w_{\text{int}} = -\mathbf{0,0}45cm$

$w_{ext} = w_{\text{int}} \Rightarrow \Delta \mathbf{0,0}45cm$

توجه: نیروی فشاری را منفی و نیروی کششی را مثبت قرار دهید.

توجه: همانطور که متوجه شدید بار واحد دارای دیمانسیون نیست.

نکته: رابطه زیر را به خاطر بسپارید:

$\sum$ (تغییر مکان حقیقی داخلی × نیروی مجازی داخلی) $\sum$ = (تغییر مکان حقیقی خارجی× نیروی مجازی خارجی)

تذکر: به تبدیل واحدها دقت کنید.

2-2 خط تأثیر (Influence Line)

خط تأثیر را می‌توان به‌صورت یک منحنی تعریف کرد که در آن، عرض نقاط، مقدار و خصوصیات یک تابع (مانند برش یا لنگر) از سازه را که در اثر حرکت نیروی واحد برروی سازه به‌وجود می‌آید، نشان می‌دهد. عرض هر نقطه از منحنی، مقدار تابع را در حالتی مشخص می‌کند که بار در آن نقطه وارد می‌شود. به عبارت دیگر، خط تأثیر، نموداری است که نشان‌دهنده تغییرات یک تابع مشخص، به علت حرکت بار واحد برروی سازه می‌باشد.

۲-۲-۱ رسم خط تأثیر به روش مستقیم

در این روش برای رسم منحنی تأثیر مربوط به یک تابع مشخص (مانند برش یا لنگر)، بار واحد را در موقعیت‌های مختلفی از دهانه در نظر گرفته، و با استفاده از معادلات تعادل، مقادیر تابع را تعیین می‌کنیم. برای هر موقعیت از بار واحد، مقدار به عنوان عرض منحنی تأثیر، در نقطه اثر بار واحد منظور نموده و از اتصال این نقاط، منحنی تأثیر را

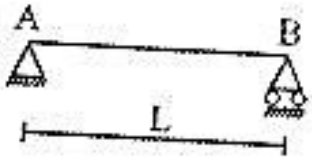
saze118.com

مشخص می‌کنیم.

* نکته 1: خط تأثیر سازه‌های معین، به‌صورت خطی است.

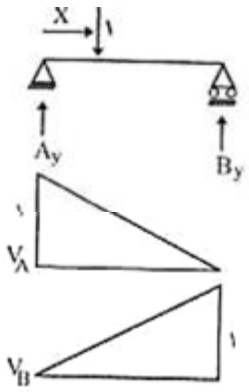
برای رسم خط تأثیر هر عامل نیرو (برش یا لنگر) در یک نقطه، کافی است. عامل نیرو را حذف کرده و یک جابه‌جایی واحد متناظر با عامل نیرو به سازه اعمال کنیم. در صورتی‌که پس از حذف عامل نیرو سازه‌ی باقی‌مانده ناپایداری گردد، با اعمال هر جابه‌جایی دلخواه به سازه، سازه به‌صورت صلب حرکت می‌کند. پس تغییر شل یافته‌ی سازه خط تأثیر عامل موردنظر است.

برای مثال: تیر ساده مقابل را در نظر می‌گیریم.



برای ترسیم خط تأثیر نیروی برشی در تکیه‌گاه A، کافی است معادل تعادل لنگر، حول نقطه B را بنویسیم. ملاحظه می‌شود که خط تأثیر از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

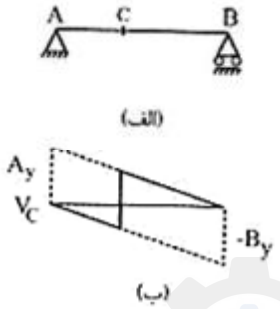
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y(L) = 1(L-X) \Rightarrow A_y = \frac{L-X}{L} \Rightarrow A_y = 1 - \frac{X}{L}$$



که نمودار آن به شکل مقابل خواهد بود:

خط تأثیر نیروی برشی هر نقطه‌ای از میانه تیر به صور زیر رسم می‌شود:

به طریقه مشابه، نمودار نیروی برشی در تکیه‌گاه B به‌صورت مقابل خواهد بود:

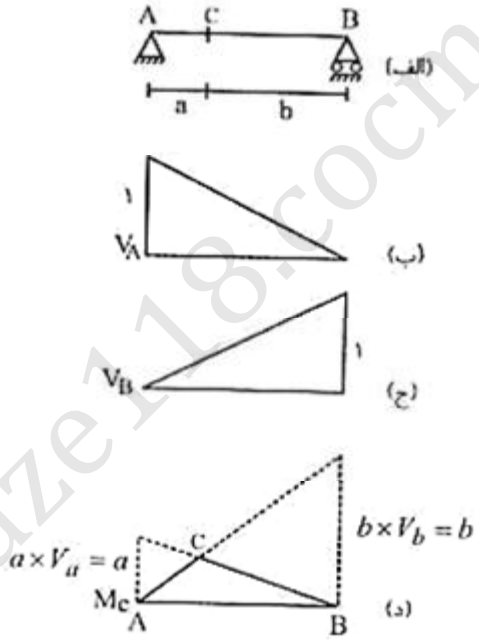


شکل ۲-۲ نحوه ترسیم خط تأثیر نیروی برشی میانه یک تیر ساده

SAZE118.COM

ابتدا خط تأثیر برش در تکیه‌گاه سمت چپ را رسم می‌کنیم. سپس قرینه خط تأثیر برش در تکیه‌گاه سمت راست را رسم می‌کنیم. قسمت راست نمودار خط تأثیر برش مقطع موردنظر، برابر خط تأثیر برش تکیه‌گاه سمت چپ تیر، و قسمت چپ نمودار خط تأثیر برش مقطع موردنظر، مخالف خط تأثیر برش تکیه‌گاه سمت راست تیر خواهد بود. (مطابق شکل 2-2)

خط تأثیر لنگر خشمی هر نقطه‌ای از میانه تیر ساده AB که به فاصله α از تکیه‌گاه سمت راست و فاصله b از تکیه‌گاه سمت چپ تیر قرار دارد، به طریقه زیر رسم می‌شود:



شکل 2-3 نحوه ترسیم تأثیر لنگر خشمی یک تیر ساده

خط تأثیر برش تکیه‌گاه سمت چپ را α برابر و خط تأثیر برش تکیه‌گاه سمت راست را b برابر می‌کنیم. مطابق شکل 2-3، خط ACB، خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه C می‌باشد.

۲-۲- رسم خط تأثیر به روش غیرمستقیم

در روش مستقیم، خطوط تأثیر با استفاده از مقادیر عددی مشخص می‌شوند، حال آن‌که شکل تقریبی این منحنی‌ها را در بسیاری از موارد، می‌توان بادقت کافی و بدون محاسبه مقادیر عددی مشخص نمود. این منحنی‌ها را «خطوط تأثیر کیفی» می‌نامند و این روش را روش غیرمستقیم می‌گویند.

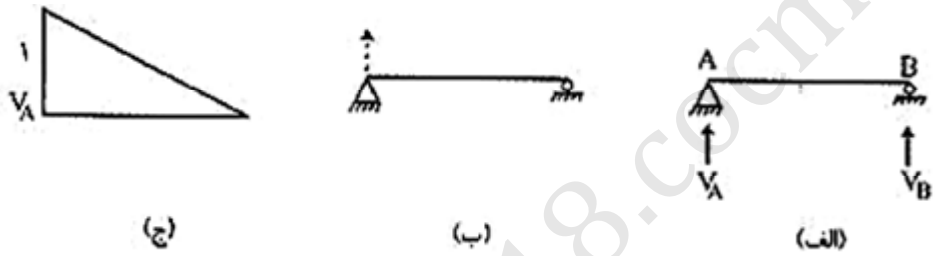
«اصل مولر بروسلاو» (Muller Breslau) برای ترسیم خطوط تأثیر سازه‌های معین و نامعین، به روش غیرمستقیم

SAZE118.COM

به‌صورت زیر است:

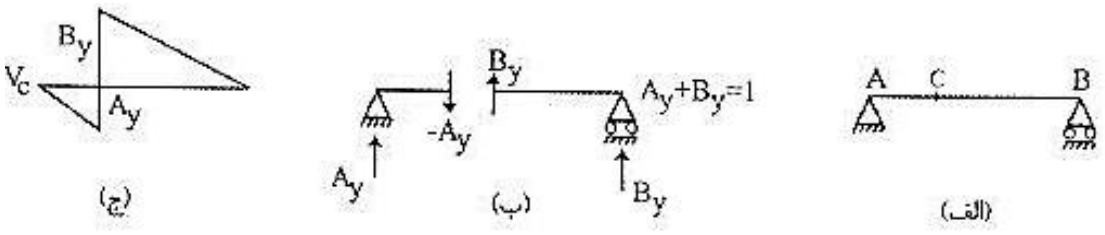
اگر به یک تابع مانند عکس‌العمل، نیروی برشی و یا لنگر، در یک محدوده کوچک، اجازه عمل داده شود، در این‌صورت منحنی تغییر شکل سازه، خط تأثیر تابع موردنظر را با یک مقیاس معین، مشخص خواهد کرد.

- بنابراین برای ترسیم خط تأثیر «عکس‌العمل تکیه‌گاهی»، کافی است با اعمال تغییر مکان واحد به جای نیروی برشی تکیه‌گاه و در جهت آن، به سازه امکان تغییر شکل بدهیم. برای مثال مجدداً تیر ساده AB را در نظر می‌گیریم. برای ترسیم خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A، انتهای چپ تیر را به اندازه واحد، بالا می‌بریم. شکل جدید سازه، منحنی خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A می‌باشد.



شکل 2-4 نحوه ترسیم خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی به روش غیرمستقیم

- برای ترسیم خط تأثیر «نیروی برشی» در نقاط میانی سازه، با بریدن آن مقطع از تیر و اجازه تغییر مکان در جهت نیروهای برشی مثبت، به‌طوری که مجموع تغییر مکان‌ها برابر واحد گردد، شکل جدید سازه را به عنوان منحنی خط تأثیر نیروی برشی رسم می‌کنیم. برای مثال، تیر ساده AB را در نظر می‌گیریم. برای ترسیم خط تأثیر نیروی برشی در نقطه C سازه را در آن نقطه بریده، و نیروهای برشی مثبت را رسم می‌کنیم. سپس در جهت این نیروهای برشی به سازه اجازه تغییر مکان می‌دهیم.

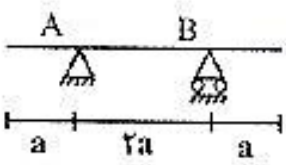


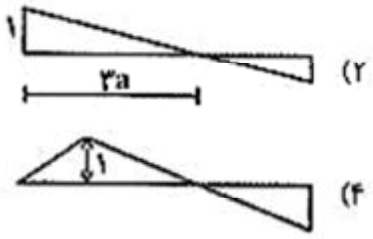
شکل 2-5 نحوه ترسیم خط تأثیر نیروی برشی در میانه تیر ساده به روش غیرمستقیم

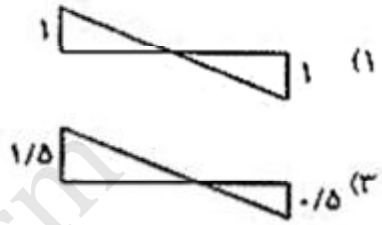
* نکته 2: برای ترسیم خط تأثیر نیروی برشی در یک نقطه از سازه، پس از اعمال تغییر مکان واحد در نقطه موردنظر، با توجه به هم‌سازی سازه، شیب دو طرف نقطه موردنظر با یکدیگر مساوی است.

SAZE118.COM

مثال ۲: خط تأثیر نیروی برشی در تکیه‌گاه A کدام است؟



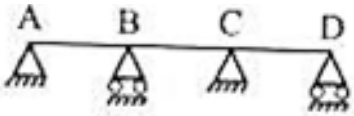


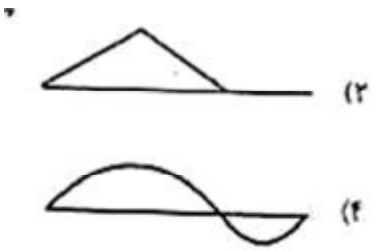


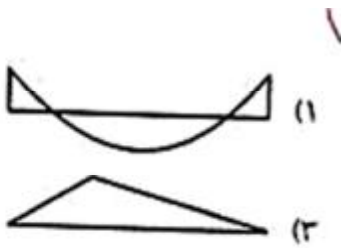
حل گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با استفاده از اصل مولر برسلاو، ارتفاع خط تأثیر در تکیه‌گاه A باید برابر واحد باشد. با توجه به گزینه‌ها، ملاحظه می‌شود که این ارتفاع در گزینه 1، برابر 0/5، در گزینه «2» برابر 0/66، و در گزینه‌های «3» و «4» برابر 1 است. اما با توجه به نکته 3، ملاحظه می‌شود که در گزینه «4»، شیب قسمت راست خط تأثیر در نقطه Aع با قسمت چپ برابر نمی‌باشد.

مثال ۳: خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه B کدام است؟







حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

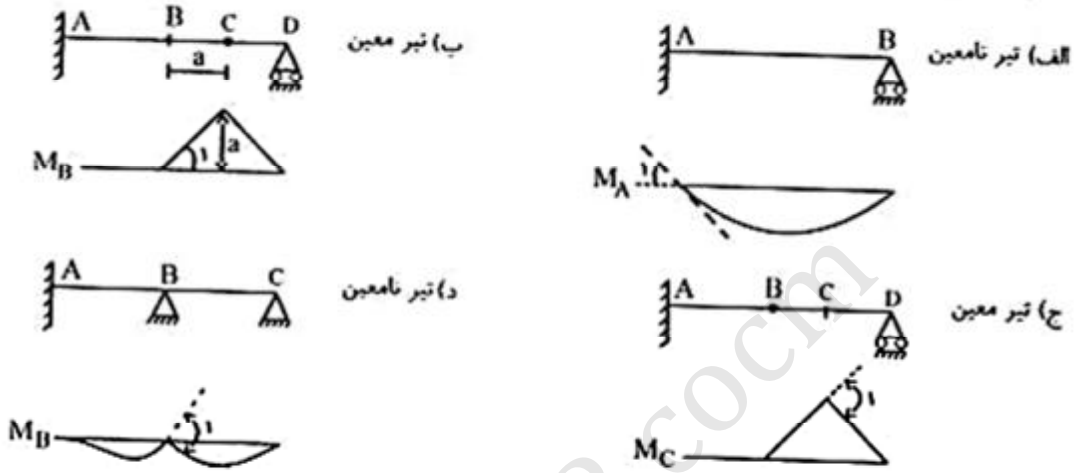
با توجه به نکته 2 و نامعین بودن سازه، خطوط تأثیر آن خطی نیستند. بنابراین گزینه‌های «2» و «3» حذف می‌شوند. همچنین با توجه به اصل مولر برسلاو، مقدار تابع عکس‌العمل در تکیه‌گاه B، برابر واحد است.

- برای ترسیم خط تأثیر «لنگر خمشی»، کافی است در نقاط میانی با بریدن مقطع و با اعمال چرخش واحد به جای لنگر

SAZE118.COM

خمشی نقطه موردنظر در جهت‌های مثبت، به سازه امکان تغییر شکل بدهیم. در تکیه‌گاه‌های میانی، نیازی به بریدن مقطع نمی‌باشد.

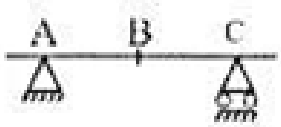
برای آشنایی بیش‌تر، در شکل 2-6 خط تأثیر لنگر خمشی در نقاطی کاز چند تیرآورده شده است.



شکل 2-6 نحوه ترسیم خط تأثیر لنگر خمشی به روش غیرمستقیم

* نکته 3: در نمودار خط تأثیر، کار نیروهای داخلی و خارجی (حاصل‌ضرب نیرو در فاصله)، غیر از عامل موردنظر، باید صفر باشد.

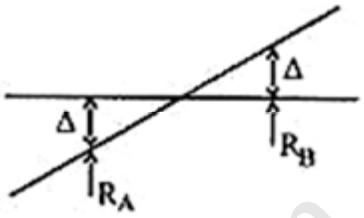
مثال ۴: خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه B کدام است؟



SAZE118.COM

حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

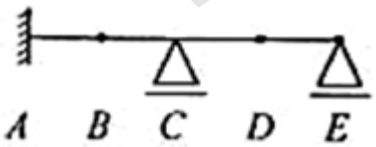
با توجه به معین بودن سازه، نمودار، خط تأثیرآن خطی است. با توجه به نکته 4 در گزینه «1»، به دلیل تغییر مکان تکیه‌گاه‌ها، کار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی مخالف صفر است.

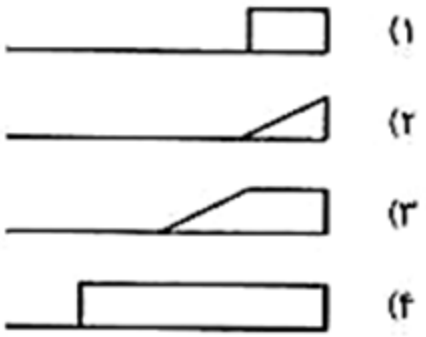


* نکته 4: در نمودار خط تأثیر، در هیچ نقطه‌ای به جز مقطع موردنظر، پرش وجود ندارد.

* نکته 5: اگر پس از حذف عامل نیرو، قطعه‌ای از سازه ناپایدار و قطعه‌ای دیگر پایدار باشد، ارتفاع خط تأثیر در ناحیه پایدار برابر صفر است.

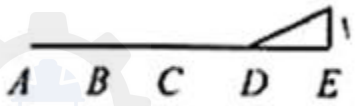
مثال ۵: خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی E کدام است؟





حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به نکته 6، سازه در قسمت ADپایدار و معین است پس ارتفاع خط تأثیر در آن ناحیه برابر صفر است.

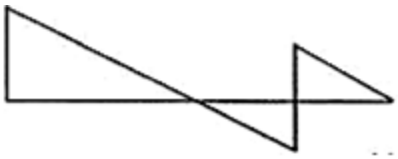


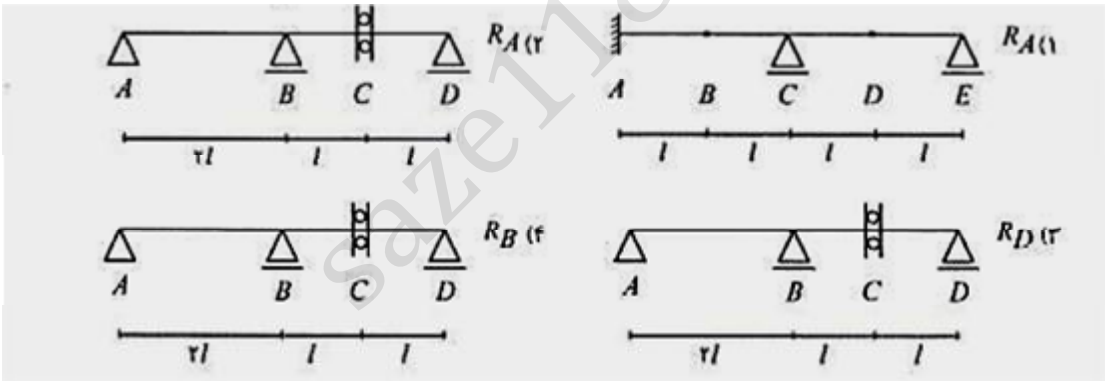
SAZE118.COM

آنچه از نکات 3 و 4 برمی‌آید این است که برای رسم خط تأثیر یک عامل نیرو به هیچ‌وجه نمی‌توان نقطه پیوسته‌ای از سازه را دچار شکست کرد. زیرا در این‌صورت علاوه بر بار واحد و عامل نیرو در نقطه‌ی شکسته شده، لنگر نیز کار انجام می‌دهد.

* نکته 6: در صورتی‌که در یک نقطه از تیر، یک اتصال دو غلتکی وجود داشته باشد، برای رسم خط تأثیر تمامی عوامل نیرو (به جز خط تأثیر لنگر در همان اتصال دوغلتکی) شیب چپ و راست اتصال باید با یکدیگر برابر باشد. بنابراین اگر یک طرف اتصال به سمت بالا حرکت کند، برای ایجاد پیوستگی در شیب باید طرف دیگر اتصال به طرف پایین حرکت کند و یا هیچ یک از دو طرف حرکتی نداشته باشند و با جابه‌جایی در یک طرف با شیب صفر انجام گیرد.

مثال ۶: خط تأثیر مقابل مربوط به کدام‌یک از گزینه‌ها می‌باشد؟

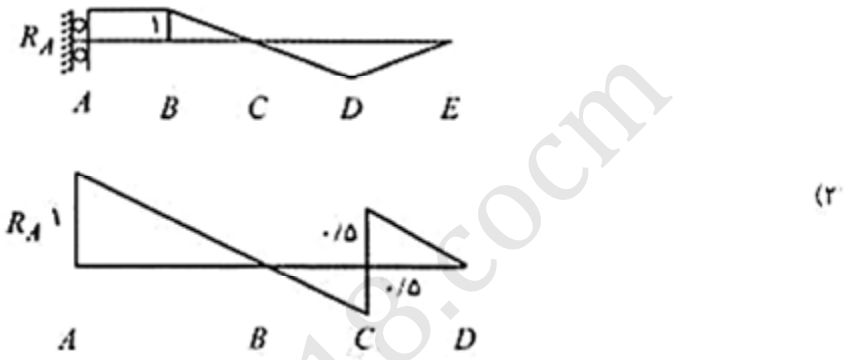




SAZE118.COM

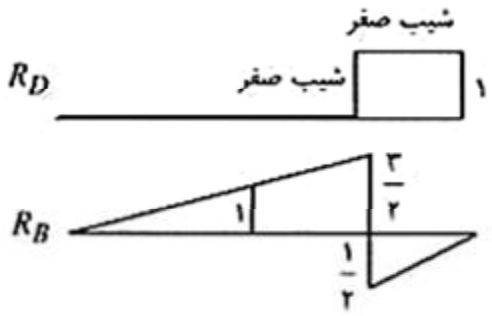
حل گزینه‌ی «۲» صحیح است.

1) برای رسم خط تأثیر در نقطه A، اتصال گیردار تبدیل به اتصال دوغلتکی می‌گردد، پس طرف راست اتصال با شیب ثابت صفر ادامه می‌یابد تا به نقطه B برسد ولی اگر خط تأثیر طرف راست اتصال غلتکی را با شیب ادامه دهیم مثل این است که لنگری دراین نقطه وجو دارد و کار انجام می‌دهد که صحیح نیست، نیزدقت گردد که پیوستگی اتصال C رعایت گردد.



(۲

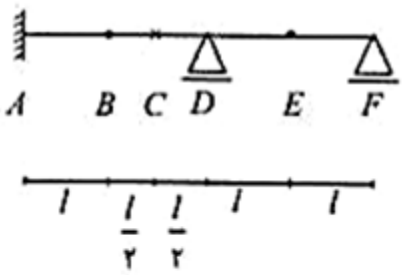
3) باید شیب دو طرف تکیه‌گاه غلتکی یکسان باشد و چون طرف راست اتصال شیب صفر است پس سمت چپ نیز باید شیب صف باشد و با رعایت پیوستگی اتصال در نقطه‌ی B، این خط با شیب ثابت صفر تا نقطه‌ی A ادامه می‌یابد.

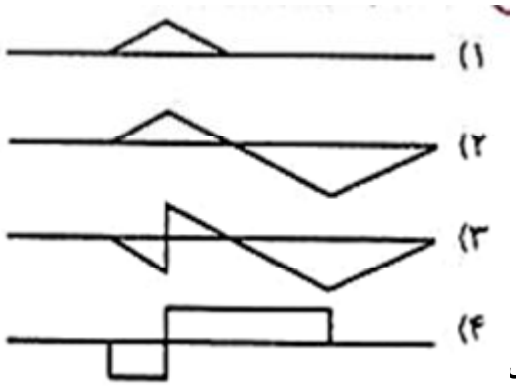


* نکته 7: برای رسیم خط تأثیر نیروی برشی در یک نقطه، ابتدا عامل مقاومت برشی در آن نقطه از سازه را از بین می‌بریم. برای این منظور کافی است در نقطه پیوسته، یک اتصال دو غلتکی قرار دهیم و یک جابه‌جایی برشی واحد به اتصال موردنظر اعمال کنیم. در این اعمال جابه‌جایی واحد، نکته مهم رعایت پیوستگی شیب چپ و راست اتصال دو غلتکی است.

SAZE118.COM

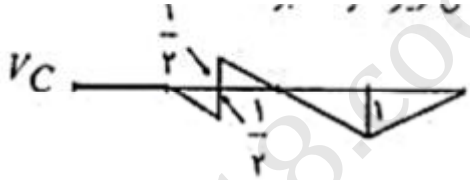
مثال ۷: خط تأثیر نیروی برشی در نقطه C کدام است؟





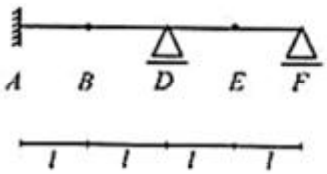
حل

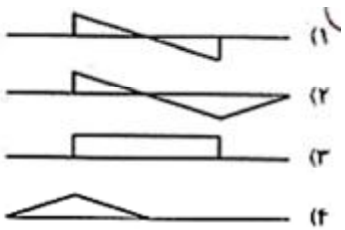
با توجه به نکته 7 و به منظور پیوستگی شیب چپ و راست نقطه c، خط تأثیر به شکل زیر خواهد بود.



* نکته 8: برای رسم خط تأثیر نیروی برشی در یک مفصل، پس از حذف عامل نیرو، مفصل تبدیل به یک اتصال تک غلتکی می‌گردد که فقط آن اتصال نیروی محوری انتقال می‌دهد، که برای تیرها می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. یعنی در تیرها برای رسم خط تأثیر نیروی برشی در یک مفصل می‌توان مفصل را از آن نقطه حذف کرده و سازه را در آن نقطه از دو طرف آزاد کرد.

مثال ۸: خط تأثیر برش را در نقطه B کدام است؟





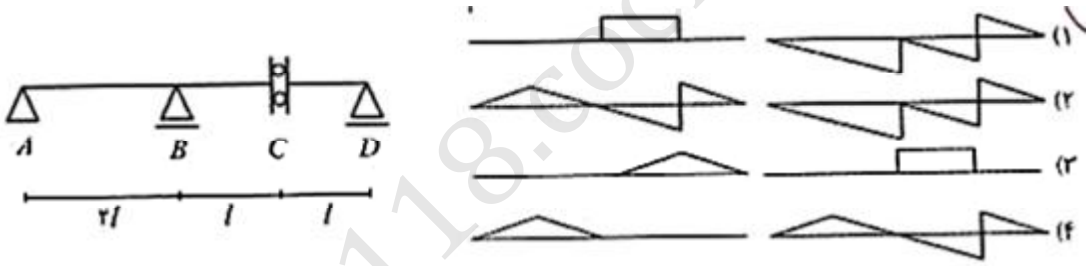
حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به نکته 8 خط تأثیر به‌صورت مقابل خواهد بود.

SAZE118.COM

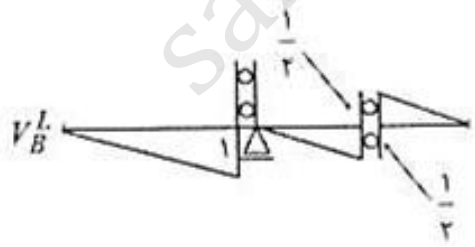
* نکته 9: برای رسم خط تأثیر برشی چپ و راست یک تکیه‌گاه باید به ترتیب اتصال دو غلتکی را در سمت چپ و راست نزدیکی تکیه‌گاه قرار دهیم به طوری‌که در حالت برش چپ تکیه‌گاه، (V^L)، لبه راست اتصال دو غلتکی درست روی تکیه‌گاه قرار داشته باشد و هیچ‌گونه حرکتی نداشته باشد و لبه چپ اتصال درست به میزان یک واحد به سمت پایین حرکت کند. نیز در حالت برش راست (V^R)، لبه چپ اتصال را بر روی تکیه‌گاه قرار داده و بنابراین لبه هیچ‌گونه جابه‌جایی نخواهد داشت و لبه راست به میزان واحد به سمت بالا حرکت خواهد کرد، نکته مهم رعایت شیب چپ و راست اتصال دو غلتکی است.

مثال ۹: خط تأثیر نیروی برشی را در سمت چپ و راست تکیه‌گاه B کدام است؟

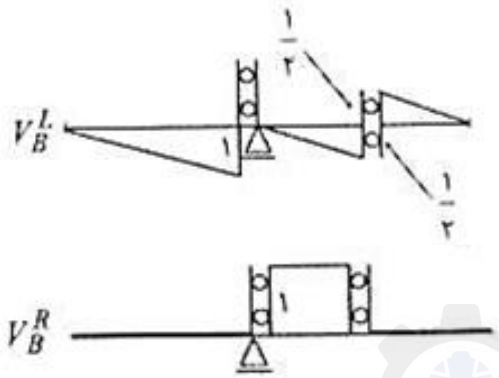


حل: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

خط تأثیر نیروی برشی سمت چپ تکیه‌گاه B:



خط تاثیر نیروی برشی سمت راست تکیه‌گاه B:

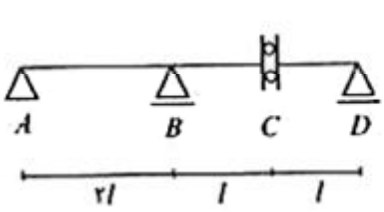


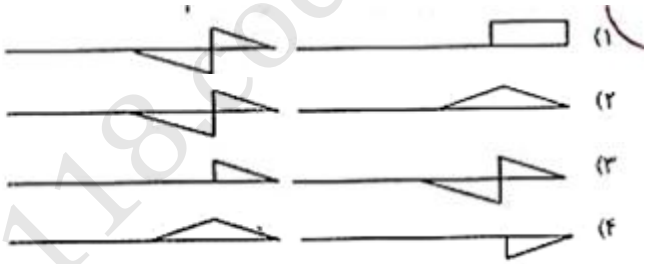
SAZE118.COM

* نکته 10: برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی باید ابتدا مقاومت خمشی نقطه موردنظر را با قرار دادن یک مفصل در آن نقطه از بین برد و سپس با اعمال یک دوران نسبی واحد در آن نقطه، شکل تغییر یافته سازه را رسم کرد. در سازه‌هایی که پس از قرار دادن مفصل، سازه ناپایدار می‌گردد، هرگونه دوران به صورت صلب خطی انجام می‌گیرد.

در صورتی که تغییر مکان قائم نقطه موردنظر صفر باشد (در نقطه موردنظر یک تکیه‌گاه قرار داشته باشد) پس غیر قراردادن مفصل سازه ناپایدار می‌گردد و می‌توان اختلاف شیب را بدون ایجاد جابه‌جایی به‌دست آورد. اما اگر نقطه موردنظر یک نقطه آزاد باشد، برای ایجاد دوران نسبی در آن نقطه، آن نقطه دچار یک جابه‌جایی به‌صورت دوران صلب حول یک نقطه می‌گردد.

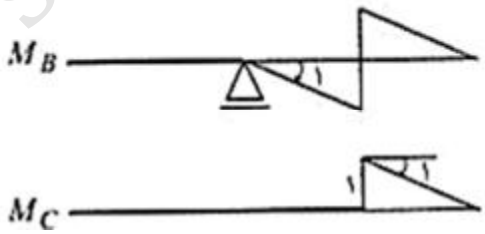
مثال ۱۰: خط تأثیر لنگر خمشی در اتصالات B و C کدام است؟





حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با توجه به نکته 10 خطوط تأثیر را رسم می‌کنیم.



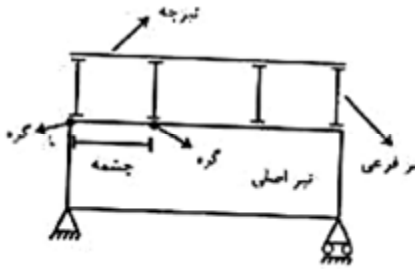
* نکته 11: برای رسم خط تأثیر لنگر در اتصال یا تکیه‌گاه دو غلتکی باید یکی از غلتک‌ها را برداریم بنابراین تنها مقاومت باقی‌مانده در آن اتصال یا تکیه‌گاه غلتکی یک نیروی محوری است که در تیرها حائز اهمیت نیست. پس برای رسم خط تأثیر در این نوع اتصال با تکیه‌گاه، می‌توان کل اتصال یا تکیه‌گاه را حذف کرده و نقطه را آزاد فرض کرد.

۲-۲-۳ خط تأثیر سازه‌های دارای تیر اصلی و تیر فرعی

در سیستمی مانند سیستم یک سقف، غالباً نیروهایی که توسط تیر اصلی تحمل می‌شوند، مستقیماً به آن مؤثر نبوده، بلکه از طریق تیرهای عرضی به آن منتقل می‌شوند.

saze118.com

قسمت‌هایی از تیر اصلی که بین دو تیر فرعی قرار دارند را چشمه می‌گوید و نقاط انتهایی چشمه‌ها، گره نام دارند.



شکل ۲-۷ نمونه سازه دارای تیر اصلی و فرعی

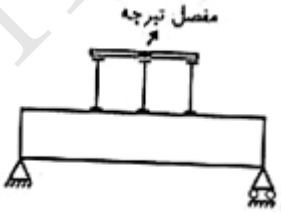
برای رسم خط تأثیر چنین سازه‌هایی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) رسم خط تأثیر تابع موردنظر، بدون در نظر گرفتن سازه بالایی

ب) مشخص نمودن تیرهای فرعی که بار سازه بالایی را مستقیماً بر سازه پایین منتقل می‌کنند.

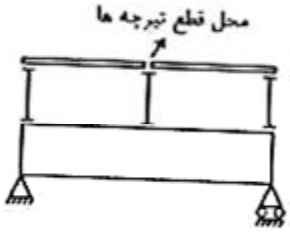
ج) استفاده از خاصیت خطی بودن خط تأثیر سازه‌های معین.

* نکته 12: اگر در تیرچه‌ها مفصل وجود داشته باشد، خط تذثیر سازه بالایی شکستگی خواهد داشت.



شکل 2-8 تیرچه مفصل‌دار

* نکته 13: در محل قطع تیرچه‌ها، خط تأثیر پرش خواهد داشت.

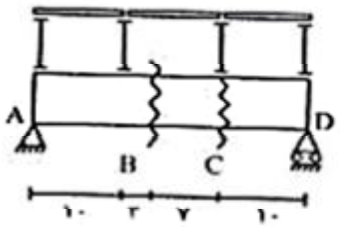


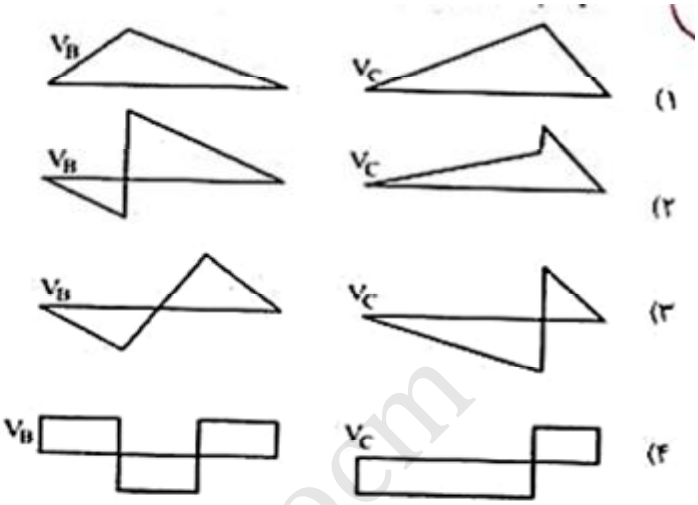
شکل ۲-۹ تیرچه قطع شده

* نکته 14: در صورتی که تأثیر چند بار مختلف در یک نقطه، موردنظر باشد، می‌توان از ترسیم خط تأثیر مربوط به هرکدام و اصل جمع آثار، استفاده نمود.

SAZE118.COM

مثال ۱۱: خط تأثیر نیروی برشی در نقاط C,B کدام است؟





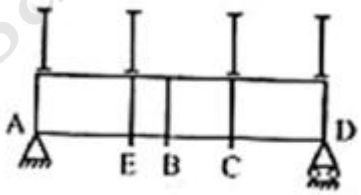
حل : گزینه‌ی «۳» صحیح است.

از آنجا که نقطه C، یک گره است. در گره‌ها و تکیه‌گاه‌های این تیر، خط تأثیر مانند یک تیر ساده خواهد بود.

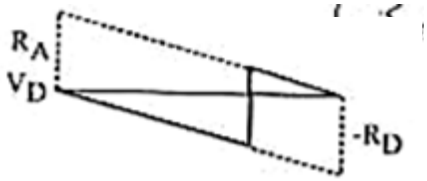
اما برای نقاط درون چشمه‌ها، از روش رسم خط تأثیر سازه‌های دارای تیر اصلی و تیر فرعی استفاده می‌کنیم:

الف) ابتدا خط تأثیر نیروی برشی را مطابق قبل برای نقطه B رسم می‌کنیم. (R_A ,R_D -) را مشخص می‌نماییم.

نمودار خط تأثیر در سمت چپ نقطه B، برابر R_D - و سمت راست آن برابر R_A خواهد بود.)

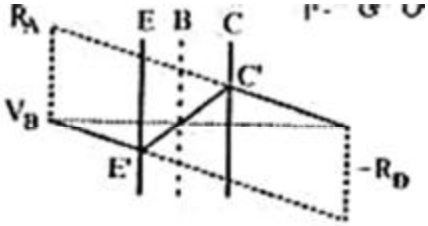


ب) نقطه اثر تیرهای فرعی کنار چشمه را مشخص می‌کنیم (خطوط عمودی C و E را رسم می‌کنیم.)

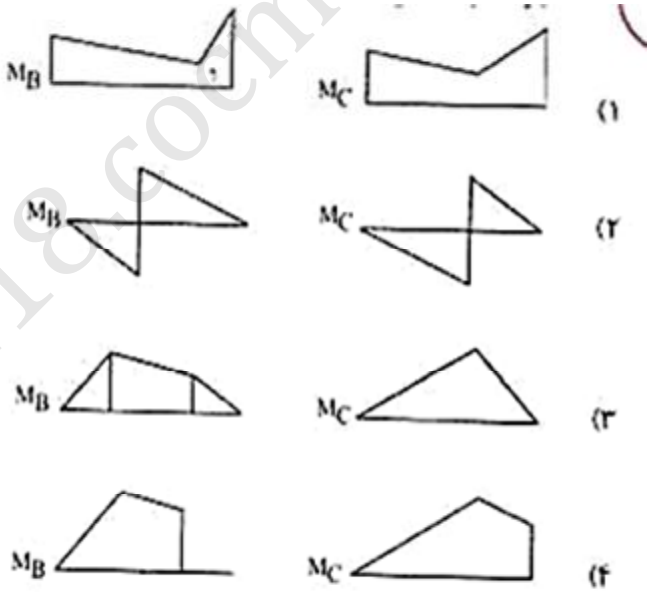


SAZE118.COM

ج) با استفاده از خاصیت خطی بودن خط تأثیر تیرهای معین، نقاط E', D' را به یکدیگر متصل می‌کنیم.



مثال ۱۲: خط تأثیر لنگر خشمی در نقاط C, B مثال قبل کدام است؟



حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

به دلیل گره بودن لنگر خشمی نقطه C خط تأثیر آن مانند تیر ساده رسم می‌شود.

برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی نقاط درون چشمه، از روش رسم خط تأثیر سازه‌ای دارای تیر اصلی و فرعی، استفاده می‌کنیم.

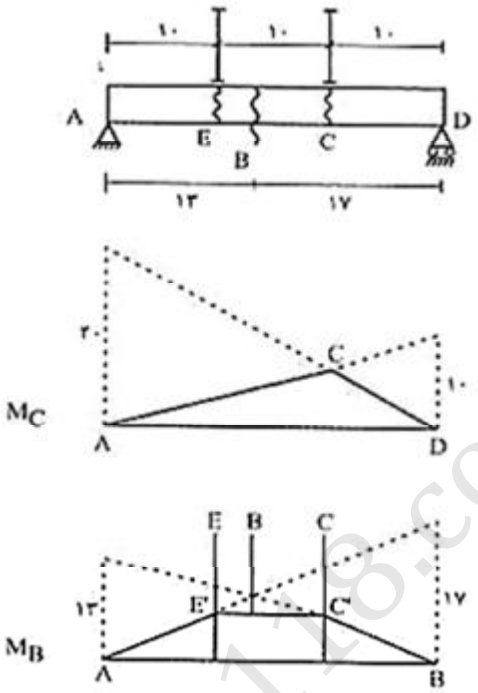
الف) ابتدا خط تأثیر لنگر خمشی را مطابق تیرهای ساده برای نقطه B رسم می‌کنیم. (نمودار خط تأثیر لنگر در سمت چپ نقطه B برابر $17R_D$ و در سمت راست نقطه B برابر $13R_A$ است.)

ب) نقطه اثر تیرهای فرعی کنار چشمه را مشخص می‌کنیم (خطوط عمودی C,E را رسم می‌کنیم)

ج) با استفاده از خاصیت خطی بودن خط تأثیر تیرهای معین، نقاط E', C' را به یکدیگر متصل می‌کنیم.

saze118.com

سنجش دانش



۲-۲-۴ خط تأثیر خرپاها

برای ترسیم خط تأثیر توابع مختلف یک خرپا، بار واحد را در گره‌های مختلف خرپا وارد آورده و نیروها را در عضو مورد مطالعه، برای موقعیت‌ای مختلف بار واحد، محاسبه می‌نماییم. سپس با توجه به خطی بودن خط تأثیر خرپاهای معین، مقادیر را با خطوط مستقیم به یکدیگر متصل می‌نماییم.

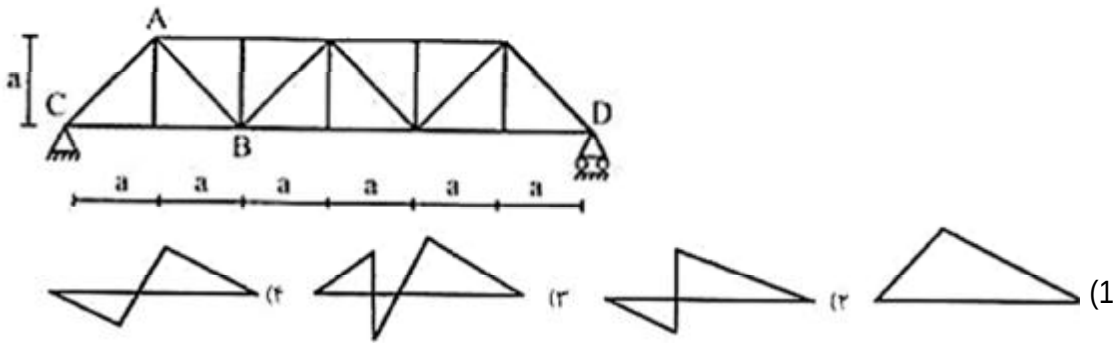
خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی خرپاها، مانند تیرهای اصلی و فرعی است. خط تأثیر نیروی محوری، به هنگام کشش مثبت و به هنگام فشار منفی خواهد بود.

* نکته 15: در خرپاهایی که بال بالا و پایین آن‌ها با یکدیگر موازی است، خط تأثیر نیروی محوری در عضو مورب یک چشمه، با خط تأثیر نیروی برشی در همان چشمه، هم شکل است. زیرا همواره مؤلفه عمودی نیروی محوری عضو مورب، برابر نیروی برشی در آن چشمه است.

saze118.com

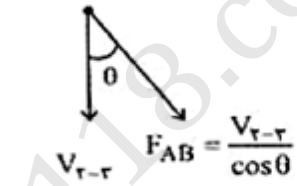
SAZE118.COM

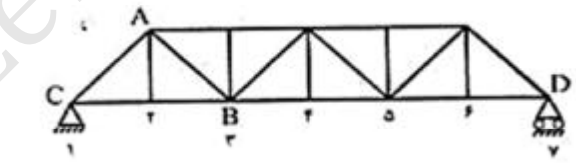
مثال ۱۳: نمودار خط تأثیر نیروی محوری عضو AB کدام است؟

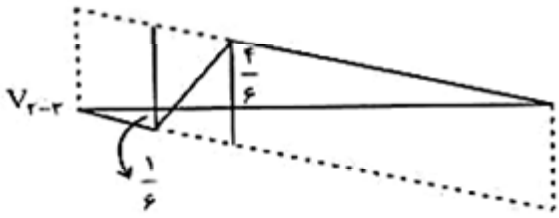


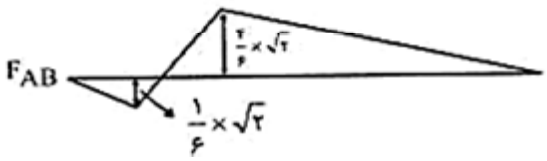
حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به نکته 15، نمودار خط تأثیری نیروی برشی در چشمه 3-2 را رسم می‌کنیم. خط تأثیر نیروی برشی، برای خرپاها، مانند تیرهای اصلی و فرعی است. با ترسیم آن و استفاده از رابطه زیر ملاحظه می‌شود که $F_{AB} = \sqrt{2}V_{2-3}$ است.









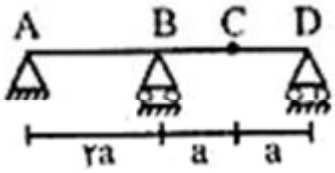
۲-۲-۵ کاربرد خط تأثیر

مهم‌ترین کاربرد خط تأثیر، در پیدا کردن بیشینه و کمینه مقدار تابع در نقطه موردنظر است. مقدار تابع برای بارهای متمرکز، از ضرب نیروهای متمرکز در مختصات مربوطه در خط تأثیر آن تابع به‌دست می‌آید. مقدار تابع برای بار گسترده

SAZE118.COM

یکنواخت برابر حاصل‌ضرب شدت بار گسترده در مساحت زیر خط تأثیر در ناحیه‌ای است که بار گسترده در آن مؤثر است.

مثال ۱۴: بیش‌ترین مقدار برش در نقطه B در اثر اعمال بار P در تیر زیر کدام است؟

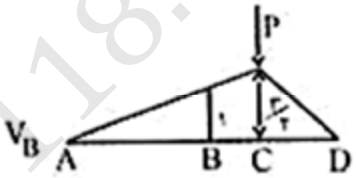


1) $\frac{P}{2}$
2) P
3) $\frac{3P}{2}$
4) $2P$

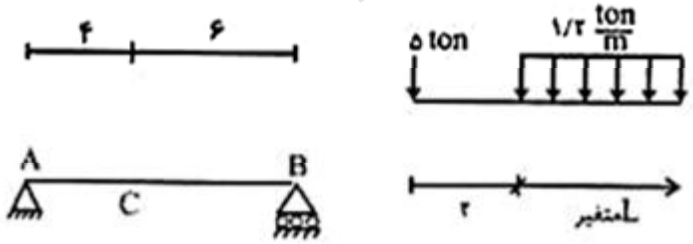
حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ابتدا خط تأثیر نیروی برش در تکیه‌گاه B را با آزاد کردن قید تکیه‌گاهی و بالا بردن B به اندازه 1 واحد رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که بیش‌ترین مقدار نیروی برشی، بر اثر اعمال نیروی P حاصل می‌شود. و مقدار آن برابر است با:

$$V_{Bmax} = \frac{3}{2} \times P = \frac{3P}{2}$$



مثال ۱۵: بیش‌ترین مقدار برش نقطه C، در اثر حرکت بارگذاری زیر برروی تیر کدام است؟



1) 4ton
2) 3/96ton
3) 3/5ton
4) 3/24ton

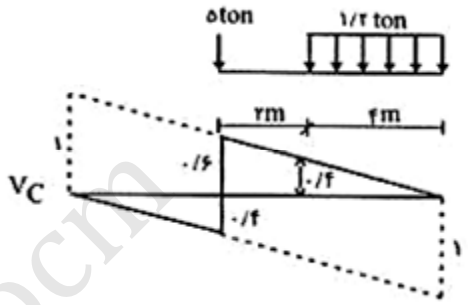
SAZE118.COM

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

ابتدا خط تأثیری برش در نقطه c را ترسیم می‌کنیم. واضح است که بیش‌ترین لنگر هنگامی رخ می‌دهد که بارگذاری در قسمت مثبت نمودار باشد. (مطابق شکل)

در این‌صورت بیشینه برش در نقطه C برابر است با:

$$V_{C\max} = 5\times 0/6 + 1/2\times(\frac{0/4\times 4}{2}) = 3/96\text{ton}$$



نشست تکیه گاهی

نشست تکیه گاهی در واقع یک تغییر مکن حقیقی خارجی است. بنابراین یک عبارت w_R به w_{ext} افزوده می گردد. هر گاه نیروی تکیه گاه ناشی از بار واحد هم جهت با نشست تکیه گاهی باشد عبارت w_R مثبت و درغیر اینصورت این عبارت منفی خواهد بود.

تغییرات دما

در اثرات تغییرات دما، تغییر مکان حقیقی داخلی خواهیم داشت، بنابراین عبارت $\sum n_i a\Delta TL$ به w_{int} اضافه می شود.

افزایش دما در حکم افزایش طول می باشد.

تغییر طول عضو درهنگام ساخت

درواقع همان تغییر مکان حقیقی داخلی است و عبارت $\sum n_i \Delta L_i$ به w_{int} اضافه می شود.

رابطه نهایی با واحد:

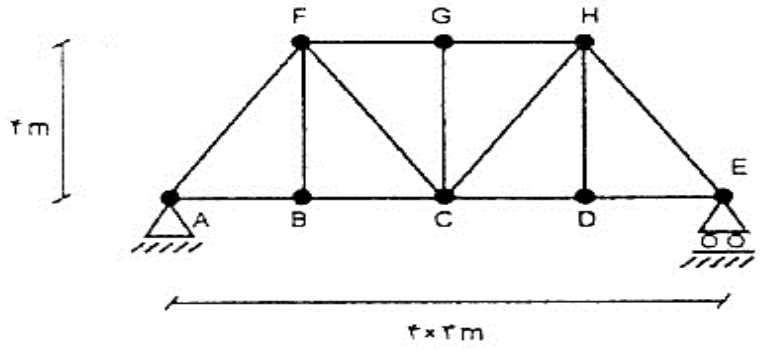
$$1\times\Delta + w_R = \sum\frac{n_i N_i L_i}{EA_i} + \sum \text{n}_i a\Delta T_i L_i + \sum \text{n}_i \Delta L_i$$

تذکر: افزایش طول را مثبت و کاهش طول را منفی بگیرید.

saze118.com

SAZE118.COM

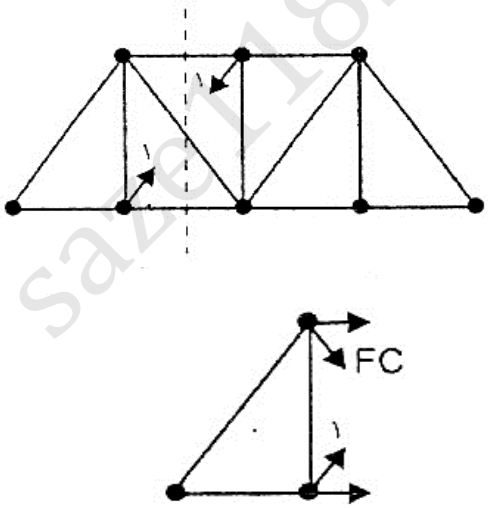
مثال: چنانچه عضو FC تحت اثر ° ۵۰ افزایش دما قرار گیرد ، دو گره G,B چقدر بـه یکـدیگر نزدیـک مـی شوند؟



$a = 10^{-5} / \circ C$

برای بدست آوردن مقدارنزدیک شدن دو گره G,B به یکدیگر یک نیروی واحد در هر کدام از گره ها و به سمت یکدیگر قرار می دهیم تا عبارت $1\times\Delta$ میزان نزدیک شدن دو بار واحد به یکدیگر را نشان دهد.

توجه کنید که کای است فقط نیروی عضو FC را تعیین کنیم. بنابراین در جهت نشان داده شده بـر سـازه و بـا نوشـتن $\sum F_y = 0$ نیروی عضو FC را بد



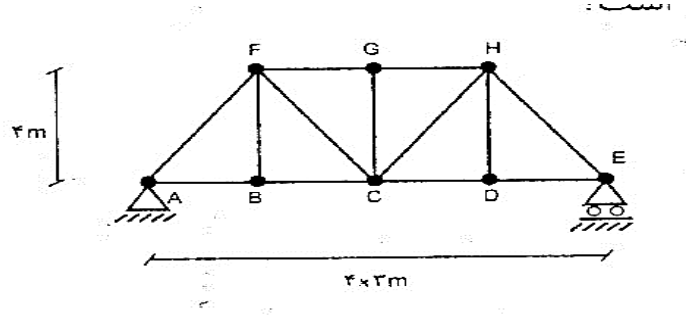
$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FC} = 1$

$w_{ext} = 1\times\Delta$ $\qquad w_{\text{int}} = \sum n_i a \Delta T_i L_i = 1\times 5\times 10^{-5}\times 50\times 500 = 1.25cm$

$w_{ext} = w_{\text{int}} \Rightarrow$ $\qquad \Delta = 1.25cm$ به یکدیگر نزدیک می شوند

SAZE118.COM

مثال: مقدار جابجایی افقی گره H تحت اثر نشست تکیه گاه E به اندازه ۱cm به سمت پایین چقدر است؟

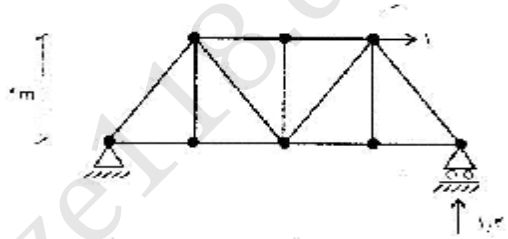


بار واحد را در نقطه موردنظر گذاشته و عکس العمل تکیه گاه E را بدست می آوریم.

$w_{ext} = 1 \times \Delta - 1_{/3} \times 1L$ زیرا تغییر مکان حقیقی داخلی نداریم

$w_{\text{int}} = \mathbf{0}$ جابجایی در جهت بار واحد

$w_{ext} = w_{\text{int}} \Rightarrow \Delta = 1_{/3} L$



برای یافتن چرخش یک نقطه از یک عضو قابی به جای بار واحد، ممان واحد در آن نقطه قرار داده و خواهیم داشت:

$w_{ext} = 1 \times q$

2-2- قاب

در این بخش نحوه رسم دیاگرام برش و خمش را در قابها مورد مطالعه قرار می دهیم.

جهت مثبت برش و خمش و نیروی محوری در شکل زیر نشان داده شده است:

تذکر: نمودار لنگر خمشی و نیروی برشی در این جزوه و به طور معمول در سئوالات کنکور به سمت بالا مثبت و به سمت پایین منفی می باشد.

SAZE118.COM

در رسم دیاگرام برش و خمش تیرها به چند نکته باید دقت کرد:

1- رابطه بار گسترده و برش و لنگر به صورت زیر است:

$\frac{dv(x)}{dx} = -q(x)$ (بار گسترده به سمت پایین مثبت)، $\frac{dm(x)}{dx} = V(x)$

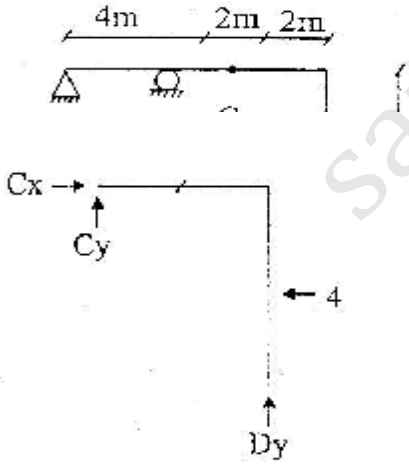
2- در قسمتی که باری وجود ندارد دیاگرام برش موازی محور تیر و ثابت خواهد بود و نمودار خمش به صورت خطی با شیب ثابت تغییر می کند.

3- در قسمتی که بارگسترده یکنواخت وجود دارد، برش به صورت خطی با شیب ثابت و خمش از درجه دوم تغییر خواهد کرد.

4- در محلی که بار متمرکز داریم دارای انفصالی درنمودار برش و تغییر شیب در نمودار خمش می باشیم.

5- اگر سازه معین باشد، ممان اینرسی اعضای سازه، I، تاثیری در رسم نمودار برش و خمش ندارد ولی اگر سازه نامعین گردد تغییرات ممان اینرسی در سهم سازمانی که به هر عضو می رسد مؤثر خواهد بود.

مثال: عکس العمل تکیه گاه B را بیابید.

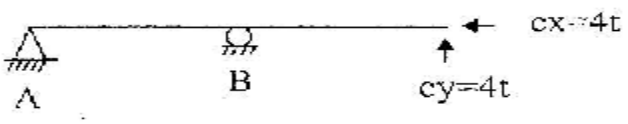


$\Rightarrow D_y = 4$

$\Rightarrow C_y = -4$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 4$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y = \frac{4 \times 6}{4} = 6ton$

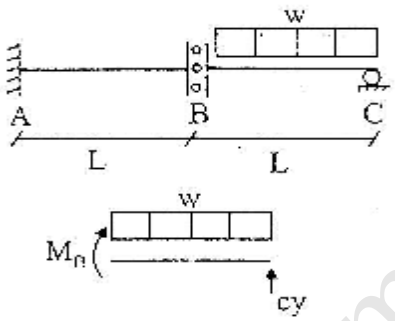


SAZE118.COM

مثال: نمودار برش و ممان سازه مقابل را بدست آورید.

سازه را به دو قسمت تقسیم کرده و معادلات تعادل را برای هر کدام می نویسیم تا عکس العمل های تکیه گاهی و در نتیجه نمودار ممان بدست آید.

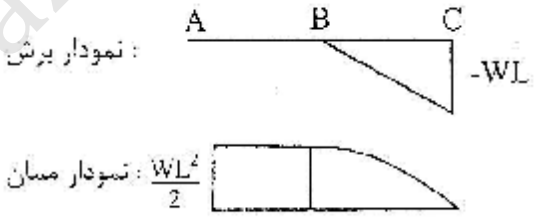
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_B = \frac{wl^2}{2}$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = wl$$



توجه کنید که مفصل برشی B، برش را منتقل نمی کند.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_A = M_B = \frac{wl^2}{2}$$
$$A_x = 0, A_y = 0$$

بنابراین نمودار برش و ممان به صورت مقابل خواهد بود.



saze118.com

SAZE118.COM

نکات کلیدی فصل دوم

Ÿ برای حل خرپا و یافت نیروهای اعضاء، اولین مرحله یافتن عضوهای صفر نیرویی و حذف آنها می باشد.

Ÿ برای یافتن نیروی عضو خاص از خرپا، معمولاً بهترین روش، مقطع زدن می باشد.

Ÿ در مقطع زدن، عضوهای بریده شده باید به گونه ای باشند که به جز عضو مورد نظر، بقیه اعضا متقارب و یاموازی باشند.

Ÿ کار مجازی یک مجموعه از نیروهای خارجی که به طور تدریجی به سازه وارد می شوند، با انرژی الاستیک ذخیره شده در سازه برابر است.

Ÿ روابط کلی بار واحد برای خرپاها به صورت زیر می باشد:

$$1\times\Delta+W_R=\sum\frac{n_iN_iL_i}{EA_i}+\sum n_i\times\Delta til_i+\sum n_i\Delta l_i$$

Ÿ در استفاده از رابطه بار واحد، نیروهای فشاری را منفی و نیروهای کششی را مثبت قرار دهید همچنین افزایش طول را مثبت و کاهش طول را منفی بگیرید.

Ÿ در استفاده از رابطه بار واحد به تبدیل واحدها دقت کنید.

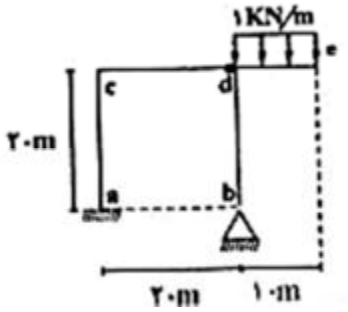
Ÿ در خرپای معین در اثر شست تکیه گاهی، تغییر دما و تغییر طول اعضا در ساخت، نیرویی در اعضا ایجاد نمی شود.

saze118.com

SAZE118.COM

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱- در سازه شکل مقابل عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه a کدام است؟



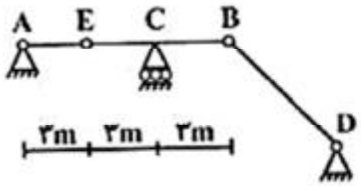
1) 7/5KN

2) 5KN

3) 2/5KN

4) صفر

۲- در قاب شکل مقابل، خط تأثیر برش در سمت چپ و راست C به ترتیب مطابق با کدام است؟



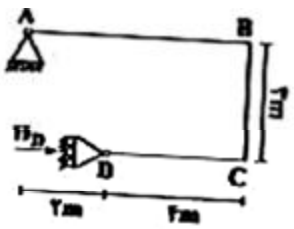
۱) (برش چپ C) (برش راست C)

۲) (برش چپ C) (برش راست C)

۳) (برش چپ C) (برش راست C)

۴) (برش چپ C) (برش راست C)

۳- با توجه به شکل مقابل، خط تأثیر H_D کدام است؟ (بار روی AB حرکت می‌کند.)

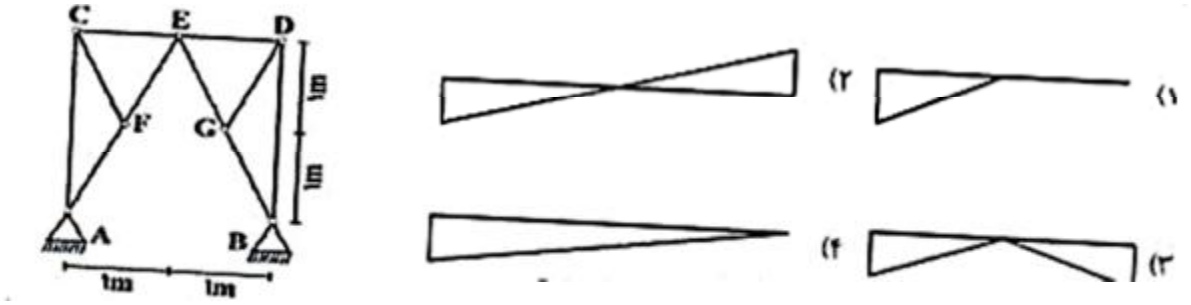


۱) ۲)

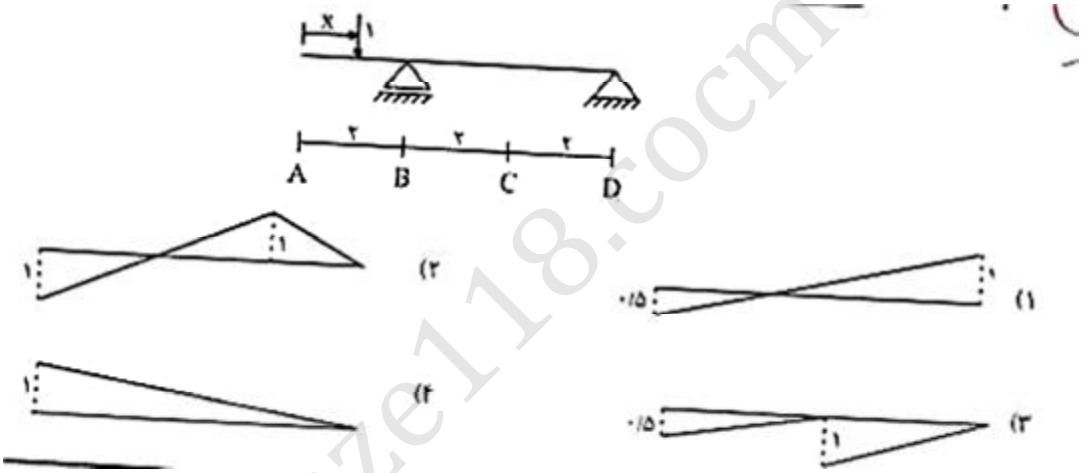
۳) ۴)

saze118.com

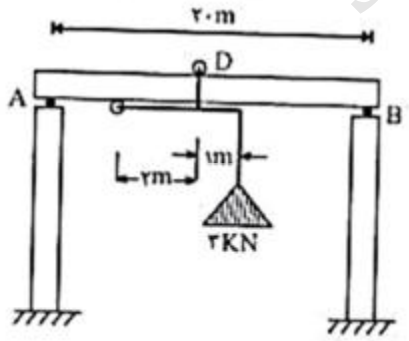
۴- خط تأثیر F_{AC} مطابق با کدام یک از اشکال می‌باشد؟ (بار روی **CD** حرکت می‌کند)



۵- کدام تأثیر تیر زیر نادرست است؟



۶- نوار نقاله‌ای طول تیر **AB** را طی می‌کند و بار وزنه خود را از طریق نقاط **C** و **D** به تیر انتقال می‌دهد، قدرمطلق بیشینه لنگر خمشی در تیر را حساب کنید.



1) 33KN.m

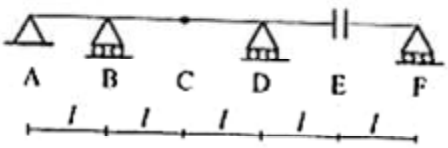
2) 16/5KN.m

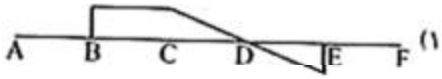
3) 15/0KN.m

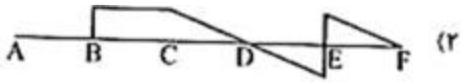
4) 7/5KN.m

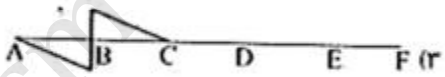
saze118.com

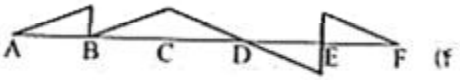
۷- خط تأثیر نیروی بروشی در سمت راست تکیه‌گاه B به شکل کدام‌یک از گزینه‌ها است؟



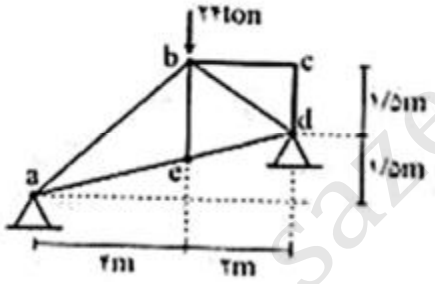
۱)


۲)


۳)


۴)


۸- در سازه‌ی شکل مقابل قطعهٔ پیوستهٔ bcd صلب می‌باشد و مفصل‌های خمشی نیز با گـرهٔ تـوپر مشـخص شده‌اند. نیرو در میلهٔ ab برحسب ton چقدر است؟



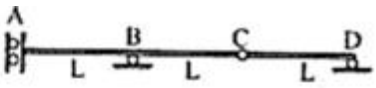
1) 0

2) 15

3) 17/5

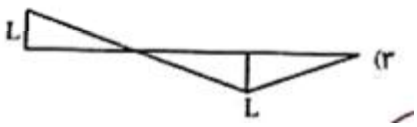
4) 20

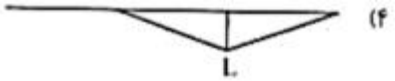
۹- خط تأثیر ممان در نقطه B کدام است؟



۱)

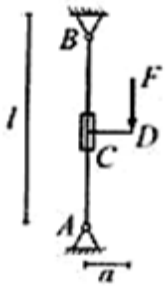
۲)

۳)


۴)


SAZE118.COM

۱۰- دستک CD در طول ستون AB می‌تواند جابه‌جا شود، حداکثر لنگر در طول ستون به ازاء چه موقعیت دستک ایجاد می‌شود؟



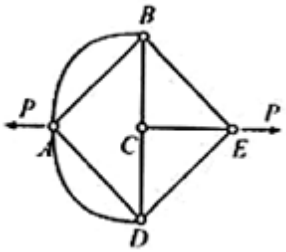
1) در وسط دهانه

2) در محل چهارم یکی از دو تکیه‌گاه

3) در یک چهارم طول دهانه

4) موقعیت دستک تأثیری در حداکثر ممان ندارد.

۱۱- سازه شکل مقابل تحت تأثیر نیروی P قرار گرفته است. نیروی محوری عضوی BC چقدر است؟



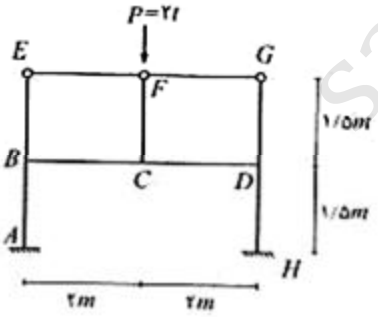
1) P

2) 2P

3) $P\sqrt{2}$

4) صفر

۱۲- بار ۲ تن در شکل مقابل اثر می‌کند. لنگر خمشی در نقطه B مربوط به انتهای عضو BC چقدر است؟



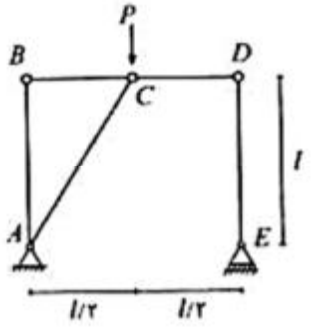
1) $2^{t.m}$

2) $4^{t.m}$

3) $5^{t.m}$

4) صفر

۱۳- در قاب شکل مقابل نیروی محوری عضو AC چقدر است؟



1) صفر

2) $\frac{P\sqrt{5}}{2}$

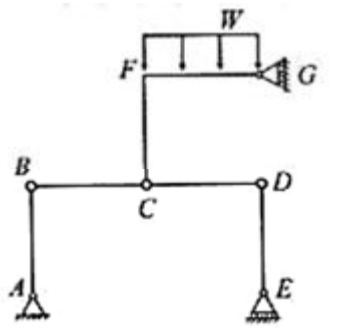
3) $\frac{P\sqrt{2}}{2}$

4) $\frac{P\sqrt{3}}{2}$

saze118.com

SAZE118.COM

۱۴- در سازه شکل مقابل طول عضو BD برابر 2L و سایر اعضا L می‌باشد. بر اثر بارگذاری گسترده یکنواخت به شدت w، لنگر خمشی در نقطه C را محاسبه کنید.



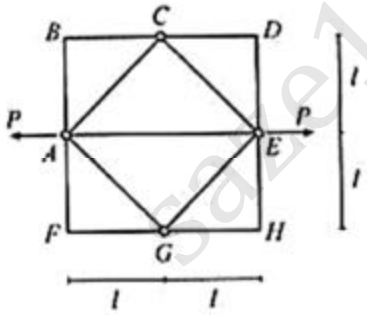
1) $\frac{3WL^2}{4}$

2) $\frac{WL^2}{2}$

3) $\frac{WL^2}{4}$

4) صفر

۱۵- سازه متقارن شکل مقابل از چهار مثلث با زوایای صلب و میله‌ی AE و چهار مفصل A, C , E و G تشکیل شده است. تحت بارگذاری P، نیروی محوری عضو AE را محاسبه کنید. (صلبیّت همه اعضاء یکسان است)



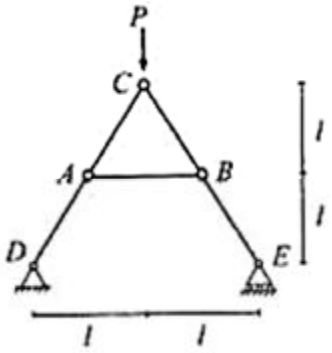
1) صفر

2) $\frac{P}{2}$

3) $\frac{P}{3}$

4) P

۱۶- در شکل مقابل نیروی داخلی عضو AB چقدر است؟



1) $N_{AB}=0$

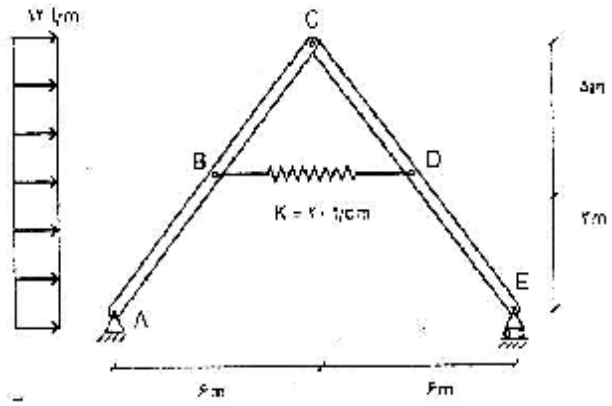
2) $N_{AB}=P$ کششی

3) $N_{AB}=\frac{P}{2}$ کششی

4) $N_{AB}=-\frac{P}{2}$ فشاری

SAZE118.COM

۱۷- اعضای خمش CE,AC در نقطه C توسط مفصل به یکدیگر مفصل شده اند، در صورتی کـه نقـاط D,B مطابق شکل توسط فنری به سختی $k = 20t/L$ به یکدیگر اتصال یابند و سازه تحت اثر نیروی گسـترده بـه شدت t/m ۱۲ مطابق شکل قرار گیرد، تغییر مکان فنر برابر است با :



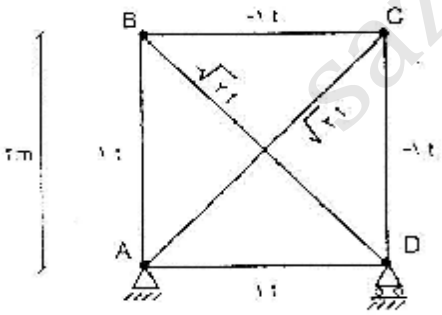
1) 40 سانتی متر ازیاد طول

2) 1/57 سانتی متر کاهش طول

3)1/92 سانتی متر ازدیاد طول

4) فنر تغییر مکان نخواهد داشت.

۱۸- خرپای مربع شکل نامعین زیر دارای تکیه گاه مفصل در A و تکیه گاه غلطکی در D و تحـت اثـر نـوعی بارگذاری، دارای نیروهای داخلی : $F_{AC} = -F_{BD} = \sqrt{2}t.F_{AB} = F_{AD} = -F_{DC} = 1t$ **مـی باشـد. اگـر صـلبیت محوری EA=۲۰۰۰t برای همه اعضا ثابت باشد، تغییر مکان افقی B را بدست آورید.**



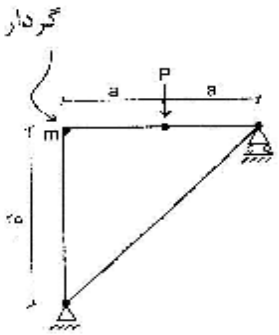
1) $0.24cm$

2) $0.48cm$

3) $0.36cm$

4) $1.2cm$

۱۹- اندازه گشتاور خمش درگره صلب m سازه مطابق شکل کدام است؟



1) $2ap$

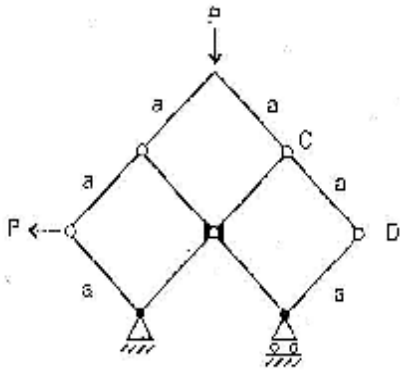
2) $\frac{3ap}{2}$

3) ap

4) $\frac{ap}{2}$

SAZE118.COM

۲۰- نیروی میله CD در شکل زیر کدام است؟



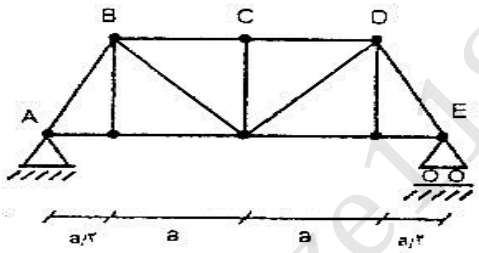
1) صفر

2) $\frac{P}{2}$

3) $\frac{\sqrt{2}P}{2}$

4) P

۲۱- چنانچه تکیه گاه A به اندازه u به سمت پایین و ۳u به سمت چپ حرکت کند. شیب نقطه B در جهت عقربه های ساعت کدام است؟



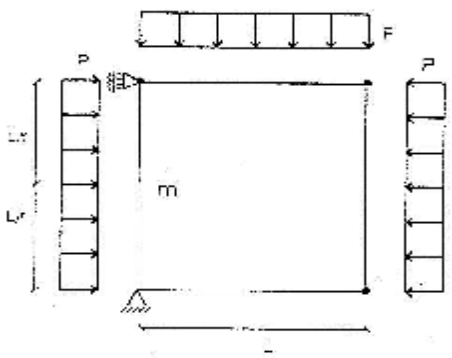
1) $\frac{x}{3a}$

2) $\frac{4u}{3a}$

3) $\frac{7u}{3a}$

4) $\frac{2u}{a}$

۲۲- اندازه گشتاور خمش در نقطه m سازه مقابل کدام است؟



1) $\frac{PL^2}{8}$

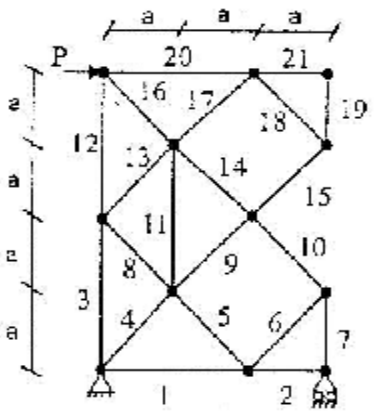
2) $\frac{2PL^2}{8}$

3) $\frac{3PL^2}{8}$

4) $\frac{4PL^2}{8}$

SAZE118.COM

۲۳- نیروی میله ۱۱ را حساب کنید.



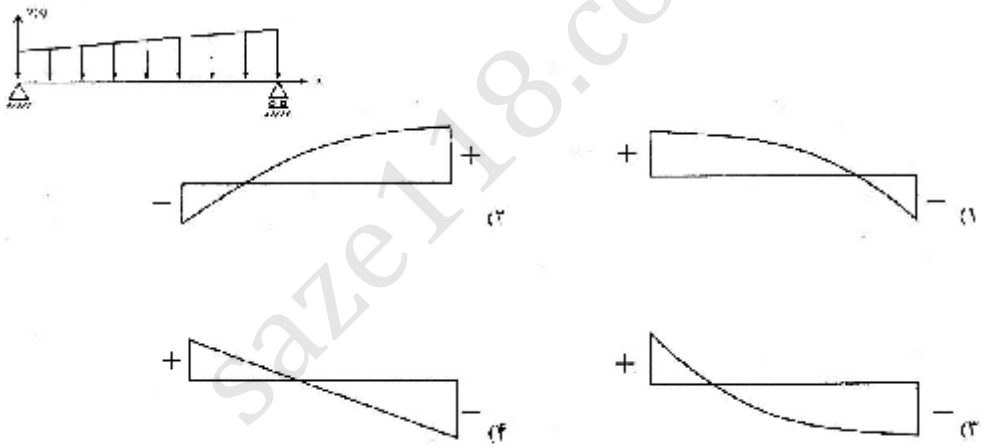
1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}P$

2) $\frac{4P}{3}$

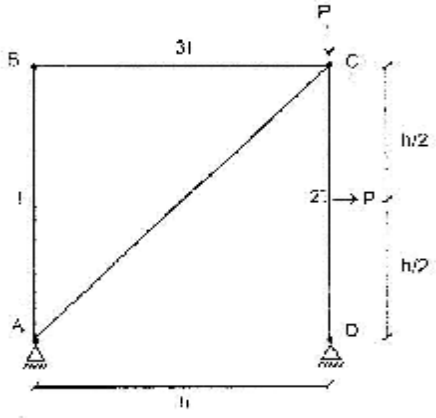
3) $\sqrt{2}P$

4) $\frac{-2P}{3}$

۲۴- کدام نمودار تغییرات نیروی برش در تیر شکل مقابل را نشان می دهد؟



۲۵- در قاب روبرو عکس العمل افقی تکیه گاه D برابر است با :



1) P

2) صفر

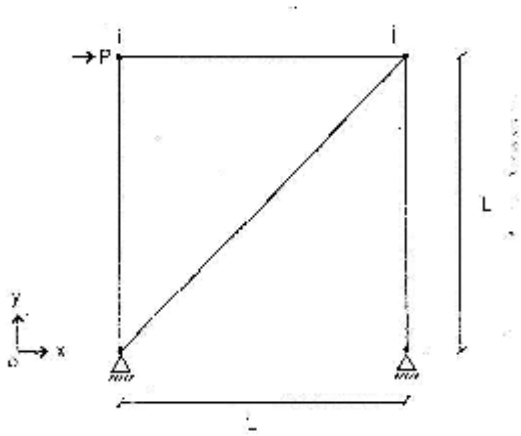
3) بیشتر از P است

4) $\frac{P}{2}$

saze118.com

SAZE118.COM

۲۶- سازه زیر در دستگاه oxy مطابق شکل زیر بار گذاری شده است اگر سختی محوری مقاطع عمودی اعضاء سازه برابر EA باشند، آنگاه تغیر مکان گره i در امتداد محور ox... در امتداد محور ox است.



1) برابر

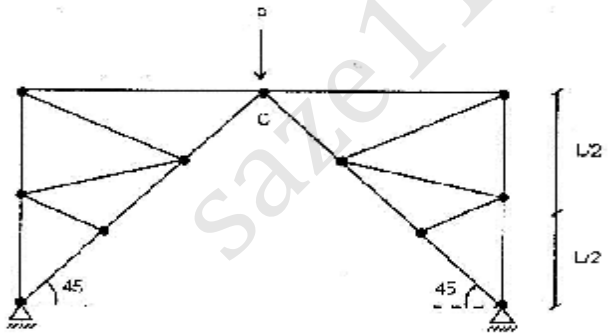
2) بزرگتر از

3) کوچکتر از

4) قرینه

۲۷- در سازه شکل مقابل تغییر مکان قائم نقطه C چقدر است؟

(سختی کلیه اعضاء برابر EA می باشد)



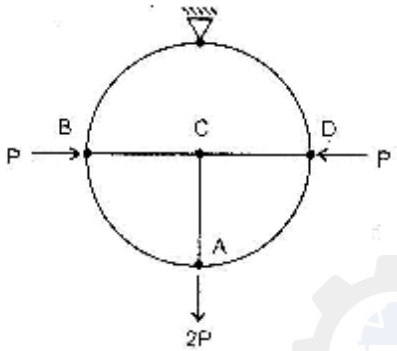
1) صفر

2) $\frac{PL}{AE}$

3) $\frac{PL}{2EA}$

4) $\frac{\sqrt{2}PL}{EA}$

۲۸- در سازه داده شده، نیروی داخلی اعضای CA,BC به ترتیب کدام است؟ (شعاع دایره R می باشد)



1) صفر و صفر

2) 3P و صفر

3) 2P ,P

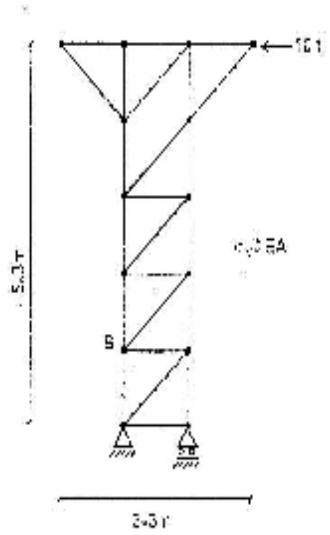
4) نیروی داخلی اعضاء قابل محاسبه نیست

saze118.com

SAZE118.COM

سنجش دانش

۲۹- در خرپای شکل زیر جابجایی افقی نقطه B چقدر ست؟



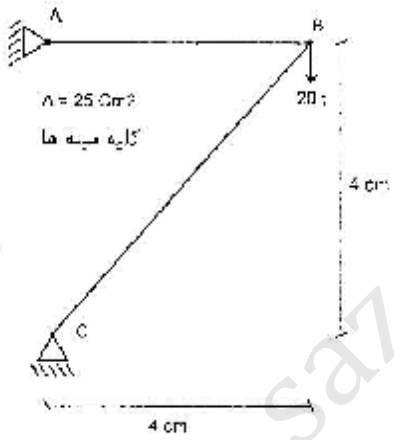
1) $\frac{180}{EA}$

2) $\frac{60\sqrt{2}}{EA}$

3) $\frac{204.8}{EA}$

4) $\frac{264.8}{EA}$

۳۰- تغییر مکان افقی گره B را حساب کنید. (ثابت =E)



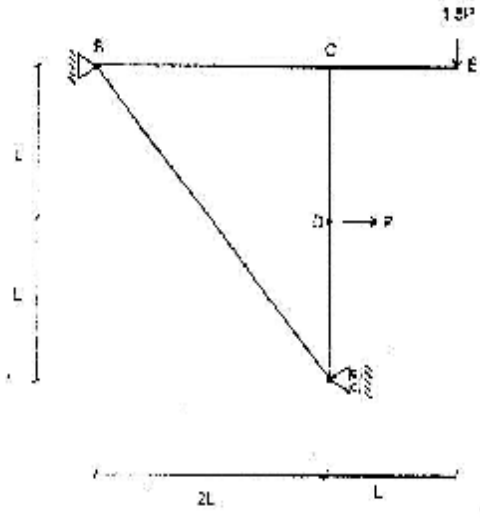
1) 12000/E

2) 16000/E

3) 23000/E

4) 32000/E

۳۱- مقدار لنگر M_{CM} چقدر است؟



1) صفر

2) $\frac{PL}{2}$ در جهت عقربه های ساعت

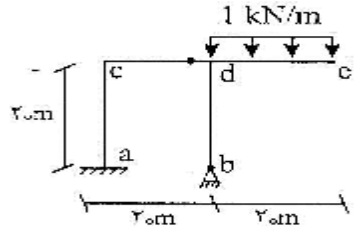
3) 1/5 PL در جهت عقربه های ساعت

4) PL در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت

saze118.com

SAZE118.COM

۳۲- در سازه شکل مقابل، عکس العمل افقی تکیه گاه a کدام است؟



1) 7/5 KN

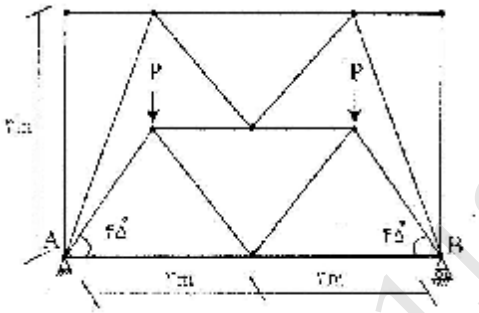
2) 5KN

3) 2/5KN

4) 0

۳۳- جابجایی افقی تکیه گاه B در اثر افزایش دمای اعضا بـه مقـدار $30^{\circ}c$ و نیروهـای وارده چقـدر اسـت؟

(ضریب انبساط حرارتی a است.)



1) $\frac{6p}{EA}$

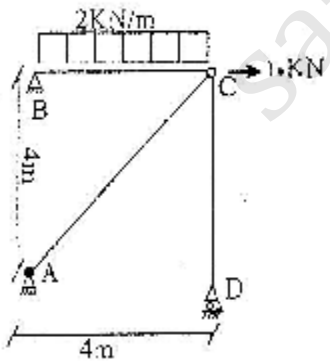
2) $180a-\frac{6p}{EA}$

3) $180a+\frac{3p}{EA}$

4) $\frac{6p}{EA}+180a$

۳۴- با صرفنظر کردن از انرژی نیروی محوری در قطعه BCD ، مقدار F_{AC} کدام است؟

$۲cm^{۲}$ = سطح مقطع میله AC , $۱۰۰cm^{۴}$= (کلیه اعضا) I و ثابت =E



1) صفر

2) 5KN

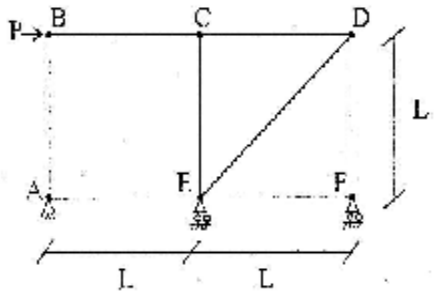
3) 10KN

4) 20KN

SAZE118.COM

سنجش دانش

۳۵- خرپای شکل مقابل مفروض است. اگر صلبیت محوری اعضا برابر EA باشد، تغییر مکان افقی B کدام است؟



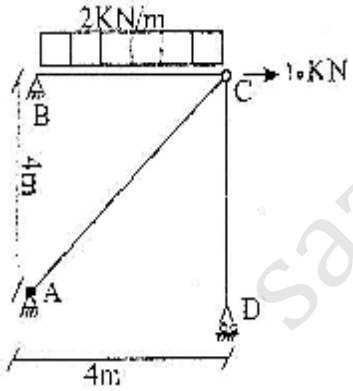
1) $\frac{2PL}{EA}(1+\sqrt{2})$

2) $\frac{4PL}{EA}(1+\sqrt{2})$

3) $\frac{2PL}{EA}(2+\sqrt{2})$

4) $\frac{4PL}{EA}(1+2\sqrt{2})$

۳۶- در سازه شکل زیر ستون پیوسته bcd با صلبیت $۱۴۴۰t.cm^{۲}$ و سطح مقطع زیاد توسط میله ac با صلبیت محوری $cm^{۴}$ ۱۰ مهار شد است. تغییر مکان گره C بر حسب mm کدام است؟



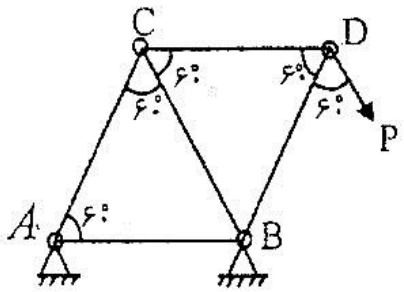
1) 13

2) 25

3) 44

4) 56

۳۷- خرپای شکل مقابل دارای اعضاء با طول مساوی l و صلبیت محوری EA می باشد. عکس العمل افقی B برابر است با :



1) صفر

2) $\frac{P}{2}$

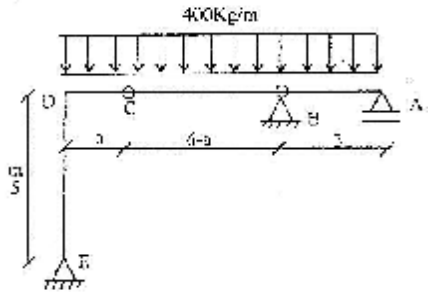
3) $\frac{P\sqrt{3}}{2}$

4) $P\sqrt{3}$

saze118.com

SAZE118.COM

۳۸- در سازه شکل زیر موقعیت مفصل C را طوری بدست آورید که قدر مطلق لنگر ماکزیمم منفی و مثبت در طول DB یکسان شود.



1) $a = 3m$

2) $a = 2m$

3) مقدار a از معادله $a^2 - 3a + 1 = 0$ محاسبه می شود.

4) مقدار a از معادله $a^2 - 33a + 36 = 0$ محاسبه می شود.

saze118.cocm

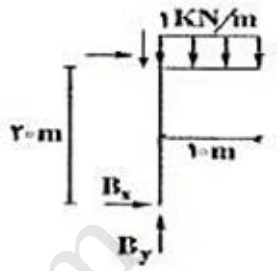
SAZE118.COM

پاسخ تشریح تست‌های طبقه‌بندی فصل دوم

۱- گزینه «۳»

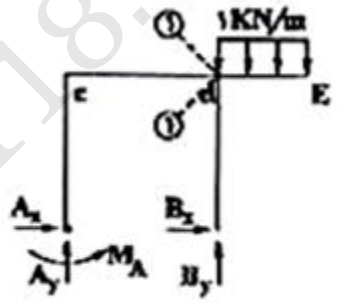
با رسم نمودار دیاگرام آزاد سازه، و نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow A_x = -B_x \qquad (1)$$



مقطع 1-1 را در محل مفصل d در نظر می‌گیریم. با رسم نمودار آزاد قسمت سمت راست مقطع و نوشتن معادله تعادل لنگر حول d خواهیم داشت:

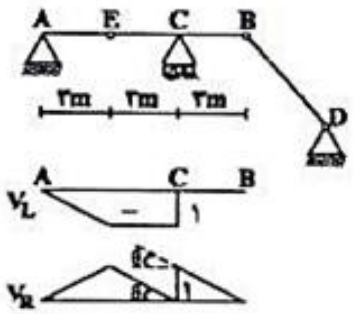
$$\sum M_d = 0 \Rightarrow B_x(20) - 1(10)\left(\frac{10}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow B_x = 2/5KN$$
$$(1) \Rightarrow A_x = -2/5KN$$



۲- گزینه «۲»

برای ترسیم خط تأثیر برش سمت چپ، در سمت چپ C و به فاصله ε، برش می‌زنیم و به سازه، در آن نقطه، اجازه تغییر مکان به اندازه واحد می‌دهیم. با توجه به شکل * . تغییر مکان در سمت چپ، به اندازه واحد به سمت پایین خواهد بود و شکل جدید سازه مطابق V_L خواهد بود. برای ترسیم خط تأثیر برش در سمت راست، مطابق شکل * . تغییر مکان را در سمت راست به اندازه واحد به سمت بالا خواهد بود. با توجه به یکسان بودن شیب سازه در تکیه‌گاه C، نمودار خط تأثیر برش در سمت راست، مطابق V_R خواهد بود. بنابراین گزینه «2» پاسخ صحیح است.

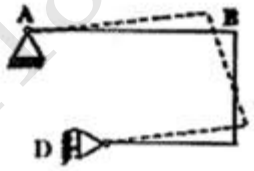
SAZE118.COM



۳- گزینه «۳»

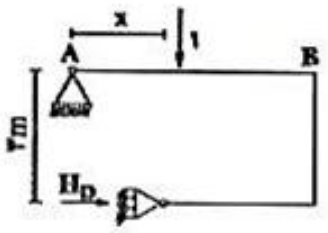
روش اول:

برای رسم خط تأثیر H_D، قید تکیه‌گاهی را رها کرده و به تکیه‌گاه D اجازه حرکت واحد، به سمت راست می‌دهیم و نمودار تغییر شکل AB را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تغییر یافته، گزینه «3» پاسخ صحیح است.



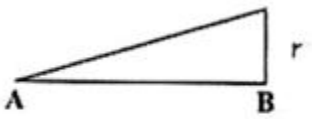
روش دوم:

با استفاده از روش مستقیم، معادله نمودار خط تأثیر را می‌نویسیم.

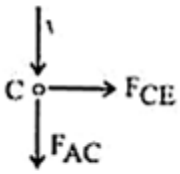


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow H_D(3) - 1(x) = 0$$

$$H_D = \frac{X}{3} \Rightarrow \begin{cases} X = 0 \Rightarrow H_D = 0 \\ X = 6 \Rightarrow H_D = 2 \end{cases}$$



۴- گزینه «۱»

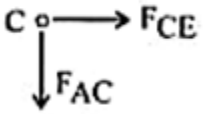


از تعادل گره F و G می‌دانیم که اعضای CF و GD صفر نیرویی هستند.

اگر نیروی واحد در گره C وارد شود، از تحلیل گره C ملاحظه می‌شود که $F_{AC} = -1$ است.

SAZE118.COM

اگر نیروی واحد در گره E و D وارد شود، از تحلیل گره C ملاحظه می‌شود که اعضای CE و AB صفر نیرویی خواهند بود.

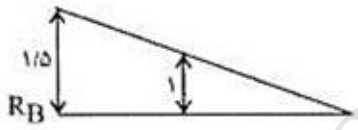


$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{CE} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} = 0$$

با بررسی گزینه‌ها ملاحظه می‌شود که در گزینه 1، ارتفاع خط تأثیر در نقطه C برابر 1- بوده و در نقاط E و D صفر می‌باشد.

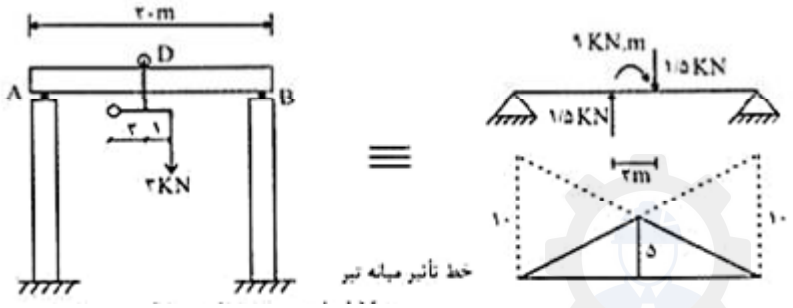
۵- گزینه «۴»

با مشاهده گزینه‌ها مشخص است که گزینه 1، خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه سمت راست (R_D) می‌باشد. گزینه «2»، خط تأثیر لنگر خمشی در نقطه C می‌باشد. گزینه «3»، خط تأثیر نیروی برشی در سمت راست تکیه‌گاه B (V_{BR}) است. اما همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه B (R_B)، ارتفاع در نقطه B برابر یک بوده و در نقطه A برابر 1/5 می‌باشد. در حالی‌که ارتفاع گزینه «4» برابر 1 می‌باشد.



۶- گزینه «۲»

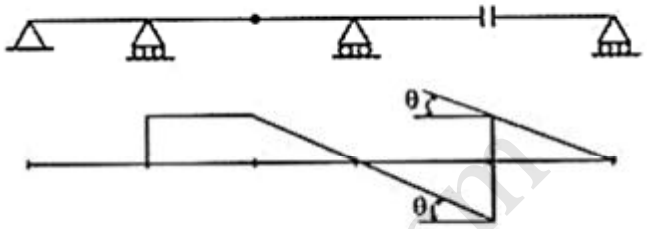
همان‌طور که از شکل پیدا است، در اثر وجود بار 3KN برروی نقاله، همواره یک لنگر $(3\times3)=9kN.m$ و به‌طور ثابت بر تیر وارد می‌گردد. همچنین هر چرخ نقاله، بار 1/5KN را بر تیر وارد می‌کند. می‌دانیم که بیشینه لنگر خمشی در تیر دو سر ساده در میانه آن واقع می‌شود. بنابراین برای مشخص کردن بیشینه لنگر حاصل از بار 1/5KN، نمودار خط تأثیر آن را رسم می‌کنیم.



SAZE118.COM

۷- گزینه «۲»

تکیه‌گاه B را از سمت راست جدا کرده و به اندازه واحد بالا می‌بریم. شکل جدید سازه، منحنی خط تأثیر می‌باشد. دقت شود که شیب در دو طرف مفصل برشی باید برابر باشد.



۸- گزینه «۴»

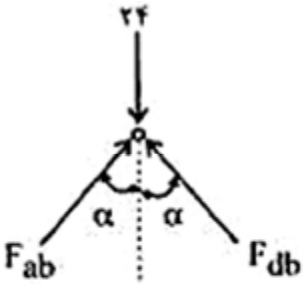
با ملاحظه گره e ، c، مشخص است که اعضای cb، cd و eb صفر نیرویی هستند. در نتیجه با توجه به گره b خواهیم داشت:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0/6$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ab} = F_{db}$$

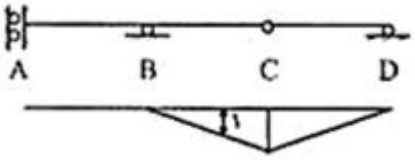
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 24 - F_{ab}\cos\alpha - F_{db}\cos\alpha = 0$$

$$24 - 2F_{ab}(0/6) = 0 \Rightarrow F_{ab} = 20\text{ton}$$



۹- گزینه «۴»

سازه را از تکیه‌گاه B برش زده و به اندازه واحد دوران می‌دهیم. شکل جدید سازه به صورت زیر خواهد بود. توجه شود که در سایر گزینه‌ها کار انجام شده توسط عکس‌العمل تکیه‌گاهی، مخالف صفر است.



۱۰- گزینه «۲»

SAZE118.COM

۱۱- گزینه «۱»

$$F_{BC} = F_{CD} = P$$

۱۲- گزینه «۲»

اعضای FE , FG , EB , GD صفر نیرویی هستند و طبق تقارن ثابت می‌شود:

$$M_B = 2\times 2 = 4t.m$$

۱۳- گزینه «۱»

۱۴- گزینه «۳»

با توجه به غلتک E و مفصل D اعضای DE و CD صفر نیرویی هستند و در نتیجه:

$$\sum M_A = 0: F_G \times 2L = wL\left(\frac{L}{2} + L\right) \Rightarrow F_G = \frac{3}{4}wL$$

از C برش زده و قطعه CFG را بیرون می‌آوریم:

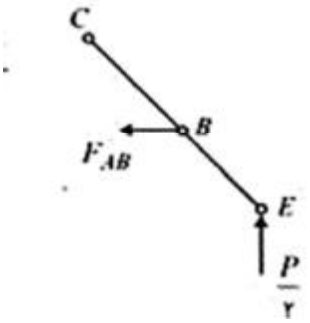
$$\sum M_C = 0: M_C = F_G \times L - \frac{wL^2}{2} = \frac{3}{4}wL^2 - \frac{wL^2}{2} = \frac{wL^2}{4}$$

۱۵- گزینه «۴»

۱۶- گزینه «۳»

(کل سازه) $\sum M_D = 0 \Rightarrow E_y \times 2L = P \times L \Rightarrow E_y = \frac{P}{2}$

$\sum M_C = 0: \frac{P}{2} \times L = F_{AB} \times L \Rightarrow F_{AB} = \frac{P}{2}$ کششی



saze118.com

SAZE118.COM

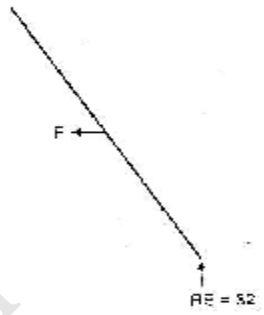
۱۷- گزینه (۳) صحیح است

کافی است نیروی فنی را بدست آوریم با یافتن عکس العمل تکیه گاه $\sum M_C = 0, E$ نیروی فنر بدست می آید.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_E \times 12 = 12 \times 8 \times \frac{8}{2} \rightarrow RE = 32t \uparrow$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F \times 5 = R_E \times 6 \Rightarrow F = 38.4t$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{F}{K} = \frac{38.4}{20} = 1.92L$$



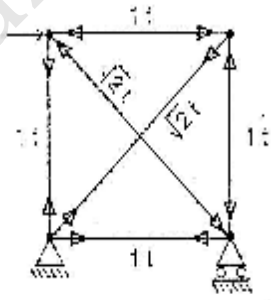
۱۸-

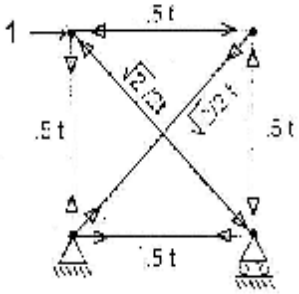
با توجه به نیروهای روی خرپای متوجه می شویم که برای تعادل در گره B نیاز به نیروی خارجی 2t در جهت مثبت افقی خواهیم داشت بنابراین با نصف کردن این نیروها می توانیم نیروهای خرپای واحد را داشته باشیم.

$$1 \times \Delta = \sum \frac{n_i N_i L_i}{EA}$$

$$= \frac{1}{2000}\left[2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2\sqrt{2} \times 100) + 4 \times 1 \times 0/5 \times (200)\right]$$

$$\Rightarrow \Delta = 0/48cm$$





۱۹- گزینه (۳) صحیح است.

عضو دو سر مفصل سمت راست نمی تواند برش تحمل کند بنابراین تمام برش وارد عضو قابی می شود و ممان در نقطه m برابر pa خواهد شد.

۲۰- گزینه (۱) صحیح است.

میله CD جزو اعضاء صفر نیرویی می باشد.

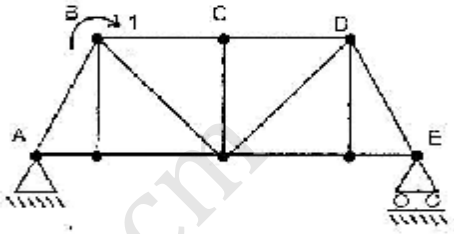
saze118.com

SAZE118.COM

۲۱- گزینه (۱) صحیح است.

سؤال دارای اشکال است چرا که چرخش برای یک نقطه روی عضو قابل تعریف است.

احتمالاً منظور طراح این بوده که ممان وادی در B قرار دهیم و تحت اثر نشست های تکیه گاهی، چرخش فرضی B را بدست آوریم.

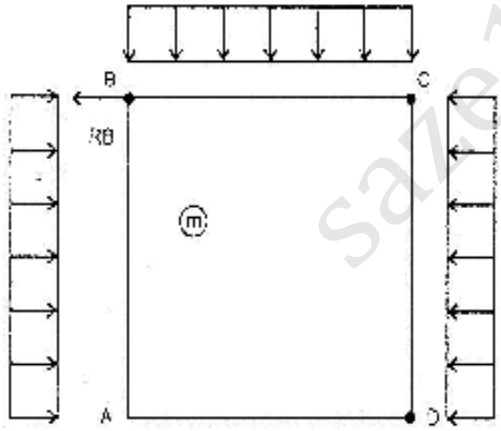


$$\sum M_E = 0 \Rightarrow Ay = -\frac{1}{3a} \downarrow \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Rightarrow w_{ext} = w_{\text{int}} \Rightarrow 1 \times q = -\frac{1}{3a} \times (-u) = \frac{u}{3a}$$

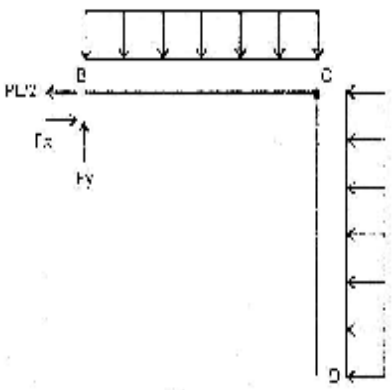
۲۲- گزینه (۳) صحیح است.

ابتدا مؤلفه های تکیه گاهی را بدست می آوریم و بعد سازه را به دو قسمت تقسیم می کنیم.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B \times L = p \times L \times \frac{L}{2} \Rightarrow R_B = \frac{pL}{2}$$

حال قطعه BCD را جدا می کنیم.



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Fy = \frac{pL}{2}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_x \times L + F_y \times L = \frac{pL}{2} \times L + \frac{pL^2}{2} + \frac{pL^2}{2}$$

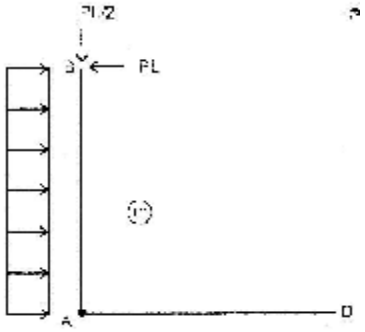
$$\Rightarrow F_x = pL$$

saze118.com

SAZE118.COM

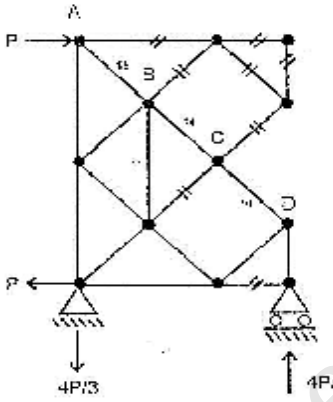
نیروهای بدست آمده را جایگذاری کرده و ممان را در نقطه m بدست می آوریم

$$M_m = pL\times\frac{L}{2} - p\frac{L}{2}\times\frac{L}{4} \Rightarrow M_m = \frac{3pL^2}{8}$$



۱۸- گزینه (۴) صحیح است

ابتدا اعضاء صفر نیرویی را مشخص می کنیم.



گره $D.F_{10} = -\frac{4}{3}p\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}p$ فشاری

گره $C: \Rightarrow F_{14} = F_{10} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}p$

گره $A: F_{16} = -\sqrt{2p}$ فشاری

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}P \quad \Rightarrow \sqrt{2}p + F_{11}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}P \Rightarrow F_{11} = -\frac{2P}{3}$$

۱۹- گزینه (۱) صحیح است.

واضح ست که برش نزدیک تکیه گاه سمت چپ مثبت و نزدیک تکیه گاه سمت راست منفی می باشد.

با توجه به اینکه $\frac{dv(x)}{dx} = q(x)$ می باشد. بنابراین شیب تغییرات V در مکانی که q(x) بیشتر می شود باید بیشتر باشد که از بین گزینه ها فقط گزینه 1 در این شرایط صدق می کند.

توجه: گزینه 4 به دلیل تغییرات خطی و گزینه 2 به دلیل برعکس بودن مکان مثبت و منفی حذف می شوند.

۲۰- گزینه (۴) صحیح است.

کافی است برای عضو CD ، حول C تعادل ممان را بنویسیم.

۲۱- گزینه (۲) صحیح است.

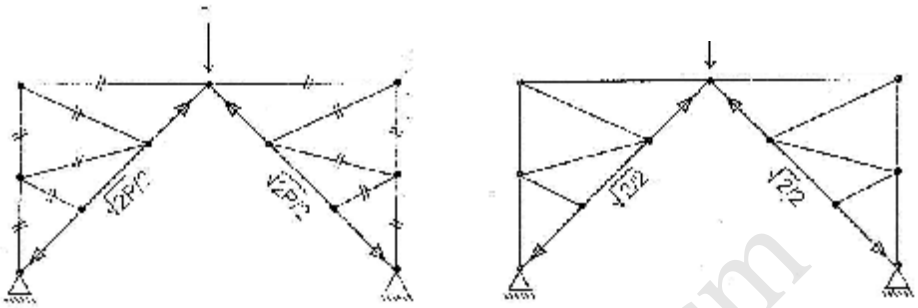
با توجه به اینکه نیروی عضو ij فشاری است ، بنابراین خود عضو ij کاهش طولی به اندازه d خواهد داشت و خواهیم

saze118.com

داشت $\Delta_i = \Delta_j + d$ بنابراین Δ_i بزرگتر از Δ_j خواهد بود.

۲۲- گزینه (۴) صحیح است.

پس از مشخص کردن اعضای صفر نیروی مساله بسیار ساده می شود.



$$1\times\Delta = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}p\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}L}{EA}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\sqrt{2}pL}{EA}$$

۲۳- گزینه (۲) صحیح است.

عضو AC صفر نیرویی می باشد. نیروی عضو BC نیز نمی تواند صفر باشد زیرا در این صورت سازه ناپایدار خواهد بود. بنابراین به راحتی می توان گزینه 2 را انتخاب کرد.

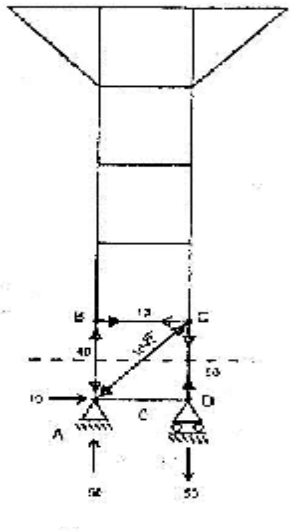
۲۴ - گزینه (۴) صحیح است.

همانطور که از خرپای بار واحد هم مشخص است. کافی است نیروهای مربع پایین را بدست آوریم.

$F_X = 0$ و مقطع $\Rightarrow F_{AC} = -10\sqrt{2}t$ فشاری

$\sum F_X = 0$ و گره C : و $\Rightarrow B_{BC} = 10t$ کشش

$\sum F_y = 0, A$ گره $\Rightarrow F_{AB} = -40t$ فشاری



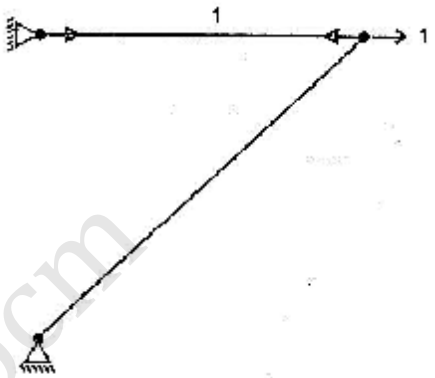
$$1\times\Delta = \frac{1}{EA}\left[10\times1\times3 + 10\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2} + 50\times1\times3\right] = \frac{264.8}{EA}$$

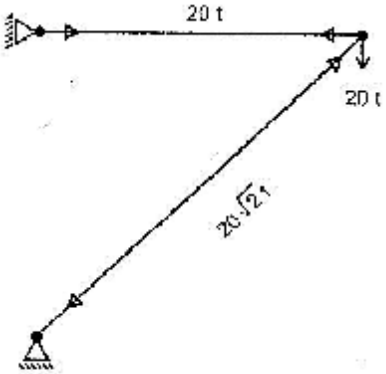
SAZE118.COM

۲۵- گزینه (۴) صحیح است.

مساله از روش بار واحد به راحتی قابل حل است.

نیروها را برای سازه اصلی و سازه با بار واحد بدست می آوریم.





$$1\times\Delta=\frac{20\times10^{3}\times1\times\mathbf{0}/\mathbf{0}4}{\mathrm{E}\times25\times10^{-4}}=\frac{32000}{\mathrm{E}}$$

Δ بر حسب متر در صورتی که واحد $E, kg_{/m^2}$ باشد.

$$1\times\Delta=\frac{20\times10^{3}\times1\times4}{\mathrm{E}\times25}=\frac{3200}{\mathrm{E}}$$

Δ بر حسب سانتی متر در صورتی که واحد $E, kg_{/m^2}$ باشد.

احتمالاً منظور طراح گزینه 4 بوده است.

۲۶- گزینه (۲) صحیح است.

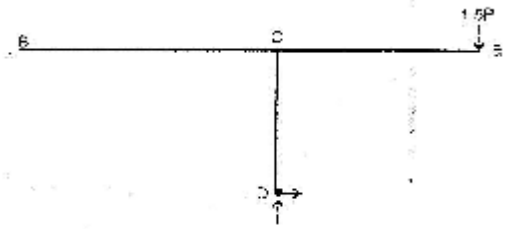
از آنجایی که میله DA دو سر مفصل است ، تمام نیروی برشی P را میله DC تحمل می کند.

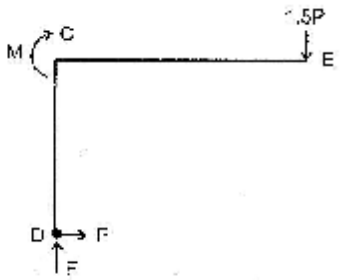
دیاگرام آزاد نیروها را رسم کرده و ممان M_{CB} را حساب می کنیم.

$$M_{CB}=1/5L-pL$$
$$\Rightarrow M_{CB}=\frac{pL}{2}$$

saze118.com

saze118.com

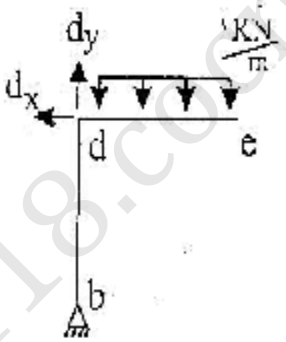




در جهت عقربه های ساعت

۲۷- گزینه (۳) صحیح است.

قاب را از گره d جدا می کنیم.



$$\sum M_b = \mathbf{0} \Rightarrow d_x = \frac{10\times 5}{20} = 2/5KN$$

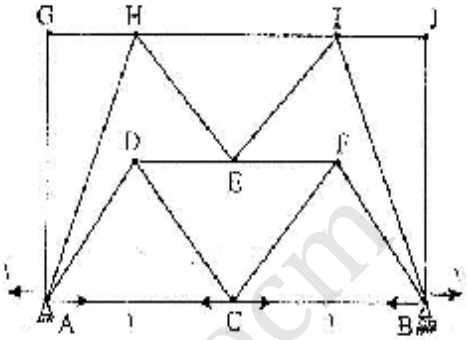
$$\sum F_x = \mathbf{0} a_x = 2/5KN$$

SAZE118.COM

۲۸- گزینه (۴) صحیح است.

ابتدا سازه را تحت اثر بار واحد قرارداده و نیروی اعضا را بدست می آوریم.

- اعضای GA ,GH, JB, IJ صفر نیرویی هستند.

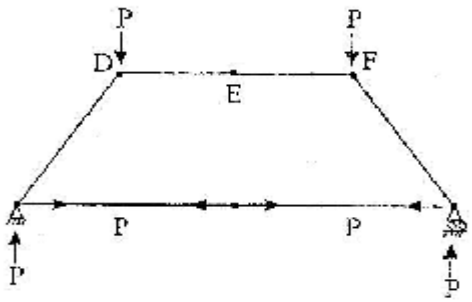


- به دلیل تقارن مستقیم نیروی دو عضو EI , EH با هم برابر و هم علامت می باشند و از $\sum F_y = 0$ در گره E می یابیم که نیروی این دو عضو صفر خواهد بود.

- با استدلالی مشابه قبل، نیروی تمامی اعضا به جز عضوهای AC, BC صفر خواهد بود. بنابراین نیروهای ایجاد شده و به صورت نشان داده شده خواهند بود.

کافی است نیروها و تغییرات دمای ایجاد شده در دو عضو AC, CB را بیابیم.

سازه اصلی دارای تقارن مستقیم است بنابراین عضوهای با نیروی صفر را جدا می کنیم. سازه باقی مانده به صورت مقابل خواهد بود.



$$\Delta = 2 \times \frac{P \times 3}{EA} + 2 \times 3 \times 30 \times a$$
$$= \frac{6P}{EA} + 180a$$

۲۹- گزینه (۱) صحیح است.

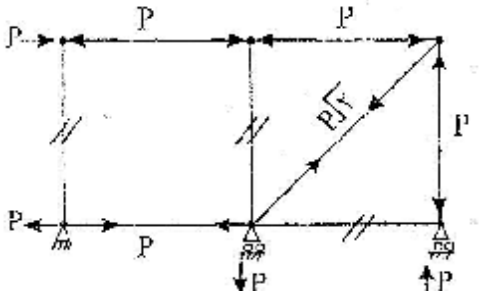
با توجه به صرفنظر کردن از جابجایی اعضای CD, BC گره C هیچگونه جابجایی نخواهد داشت. بنابراینه عضو AC هیچگونه تغییر طول و در نتیجه هیچگونه نیرویی نخواهد داشت.

SAZE118.COM

۳۰- گزینه (۳) صحیح است.

نیروی اعضای خرپا را بدست می آوریم. سازه را با واحد نیز همانند همین خرپا خواهد بود.

$$\Delta = 4\times1\times\frac{pL}{EA}+1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}P(\sqrt{2}L)}{EA}\frac{2PL}{EA}(2+\sqrt{2})$$

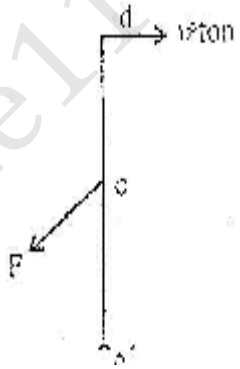


۳۱- گزینه (۲) صحیح است.

به دلیل این که میله bcd عمودی است و دارای سطح مقطع زیاد می باشد (و در نتیجه تغییر مکان محوری ندارد) جابجایی C افقی خواهد بود. بنابراین کافی است تصویر تغییر طول میله ac در جهت افقی را به دست آوریم.

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}F\times3 = 16\times6$$
$$F = 40ton$$

$$\Delta_{ac} = \frac{FL}{EA} = \frac{40\times5}{10^4} = 2cm = 20mm$$
$$\Delta_C = \frac{5}{4}\times20 = 25mm$$



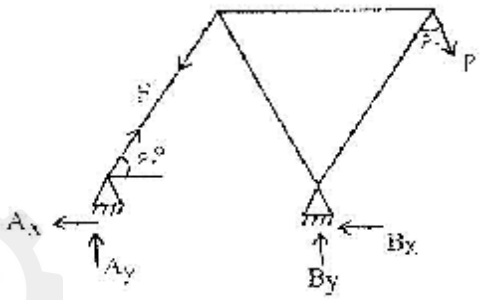
۳۲- گزینه (۱) صحیح است

توجه کنید که عضو AB به دلیل این که دو تکیه گاه قرار دارد تغییر طول نخواهد داشت و بنابراین نیروی آن صفر خواهد بود. خرپا به صورت مقابل تبدیل خواهد شد.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Ay\times L + p\cos30\times L = 0$$
$$Ay = -p\cos30$$

$$A:\sum F_y = 0 \Rightarrow Ay + F\cos30 = 0 \Rightarrow F = -\frac{Ay}{\cos30}$$
$$\Rightarrow F = P$$

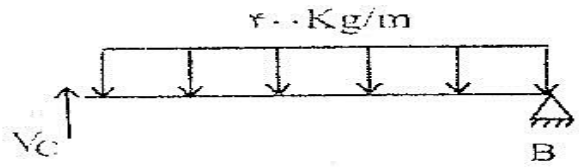
$$A:\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + F\cos60 = 0 \Rightarrow A_x = -\frac{P}{2}$$
$$A_x + B_x = p\cos60 \Rightarrow B_x = 0$$



SAZE118.COM

۳۳- گزینه (۴) صحیح است

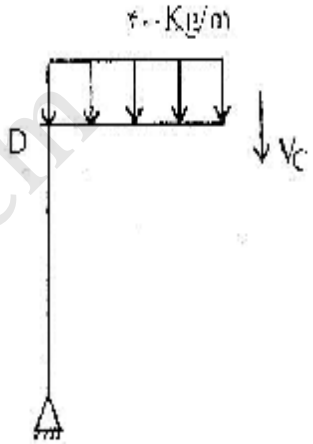
مشخص کنید که قسمت AB در حل مساله هیچ تاثیری نمی گذارد. لنگرهای ماکزیمم را محاسبه می کنیم.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (6-a)V_C = 400 \times \frac{(6-a)}{}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{400(6-a)}{2}$$

$$M^{+}_{max} = V_C = \frac{(6-a)}{2} - \frac{400(6-a)}{8} = \frac{400(6-a)}{8}$$



$$M^{-}_{max} = M_D = V_C \times a + 400 \times \frac{a^2}{2} = \frac{400(6-a)a}{2} + \frac{400a^2}{2}$$

$$M^{+}_{max} = M^{-}_{max} \Rightarrow \frac{400(6-a)^2}{8} = \frac{400(6-a)a}{2} + \frac{400a^2}{2}$$

$$\Rightarrow (6-a)^2 = 4(6-a)a + 4a^2$$

$$\Rightarrow 36 - 12a + a^2 = 24a - 4a^2 + 4a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 36a + 36 = 0$$

saze118.com

SAZE118.COM

فصل سوم – تغییر شکل سازه‌ها

در این فصل به بررسی انواع روش های محاسبه تغییر شکل تیرها پرداخته شده است. به دلیل گستردگی مطلب سعی شده مطالب با اهمیت زیادتر، بیشتر توضیح داده شوند، برای قسمت های کم اهمیت تر مرجعی برای مطالعه بیشتر معرفی می گردد.

3-1- انتگرال مضاعف

اساس این روش کار با معادلات تغییر شکل تیر است. هدف در این روش به دست آوردن معادله تغییر شکل تیر است.

همانطور که از درس مکانیک جامدات به یاد داریم، رابطه میان خمش و شعاع انحنای تیر به صورت $\frac{M}{EI}=\frac{1}{P}$ می باشد.

از هندسه تحلیلی می دانیم که شعاع انحنای یک منحنی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{P}=\frac{d^2y/dx^2}{\left(1+\left(dy/dx\right)^2\right)^{3/2}}$$

درمعادله فوق از $\left(dy/dx\right)^2$ به دلیل کوچکی می توان صرفنظر کرد بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\int\frac{M}{EI}dx$$

dy/dx درواقع همان شیب منحنی می باشد که در تیرها با q نشان داده می شود.

$$\Rightarrow q=\int\frac{M}{EI}dx]$$

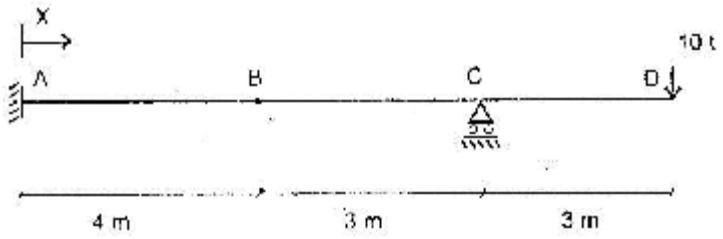
$$\frac{dy}{dx}=q(x)\Rightarrow Y=\int q(x)dx$$

بنابراین با داشتن معادله ممان خمشی وشرایط مرزی، می توانیم معادله مقدار شیب در هر نقطه و معادله تغییر شکل تیر را بدست آوریم.

تذکر: در تیرهای چند دهانه، در صورت وجود مفصل بین دهانه ها، باید برای هر دهانه معادلات جداگانه نوشت.

SAZE118.COM

مثال: معادله تغییر شکل تیر مقابل را بدست آورید.



ابتدا معادله ممان را بدست می آوریم:

$$M = 10x + 20 < x-3 > \qquad M = 40 - 10x$$

توجه: $< x-3 >$ یعنی اینکه این عبارت وقتی $x \le 3$ است برابر صفر و در حالت $x > 3$ خواهد بود

معادلات انتگرالی را برای قسمت اول می نویسیم.

توجه کنید که برای قسمت اول شرایط مرزی برابر خواهد بود با:

$$y(0) = 0, q(0) = 0$$

$$q(x) = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left[40x - 5x^2 + q_\circ\right], \qquad q(0) = 0 \Rightarrow q_\circ = 0$$

$$y(x) = \int q(x)dx = \frac{1}{EI}\left[20x^2 - \frac{5}{3x^2} + y_\circ\right], \qquad y(0) = 0 \Rightarrow y_\circ = 0$$

معادله تغییر شکل قسمت اول سازه

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{EI}\left[20x - \frac{5}{3}x^2\right]$$

$$y(4m) = \frac{213/3}{EI}$$

حال به سراغ قسمت دوم می رویم

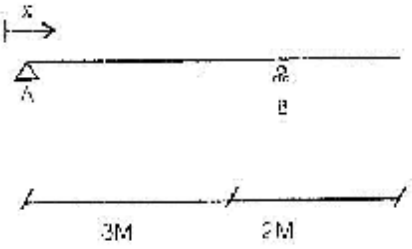
شرایط مرزی برای قسمت دوم برابر خواهد بود با

$$y(3) = 0 \quad , \quad y(0) = \frac{213/3}{EI}$$

SAZE118.COM

محاسبات قسمت دوم را خودتان انجام دهید.

مثال: هر گاه معادله تغییر شکل قسمت AB تیر مقابل تحت بارگذاری خاصی $y=\frac{1}{100}(x^3-2x^2+c_1x+c_2)$ باشد، شیب تکیه گاه A کدام است؟



1) 0/03 2) -0/03

3) 0/066 4) 0/05

حل : ابتدا ثابت های c_2,c_1 را بدست می آوریم.

$$y(0)=0\Rightarrow c_2=0$$

$$q(x)=\frac{dy}{dx}\Rightarrow qx=\frac{1}{100}(3x^2-4x+c_1)$$

$$y(3)=0\Rightarrow \frac{1}{100}(3^2-2\times 3^2+3c_1)=0\Rightarrow c_1=-3$$

$$q_A=q(0)=-0/03$$

3-1 روش تیر مزدوج (Conjugate Beam)

از این روش برای محاسبه تغییر مکان و شیب هر نقطه از یک «تیر» تحت بارگذاری مشخص، استفاده می‌شود.

در این روش، مسئله تعیین شیب‌ها و تغییر مکان‌های یک تیر تحت بارهای حقیقی، به یک مسئله فرضیع یعنی تعیین نیروهای برشی و لنگر خمشی یک تیر مزدوج (غیر حقیقی)، تحت بار ارتجاعی $\frac{M}{EI}$، تبدیل می‌شود.

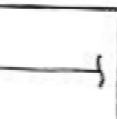
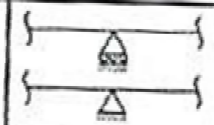
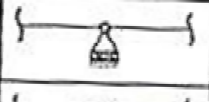
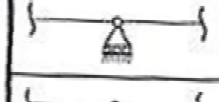
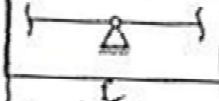
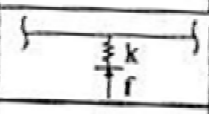
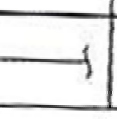
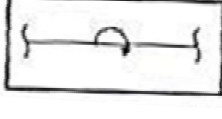
مقدار نیروی برشی هر مقطع از تیر مزدوج، برابر مقدار شیب در مقطع مربوطه از تیر اصلی است.

مقدار لنگر خمشی هر مقطع از تیر مزدوج، برابر مقدار تغییر مکان (با علامت مخالف) در مقطع مربوطه از تیر اصلی است.

تیر مزدوج را با توجه به شرایط مرزی می‌توان تشکیل داد. جدول 3-1، نحوه تبدیل تکیه‌گاه‌ها و شرایط داخلی تیر اصلی به تیر مزدوج را نشان می‌دهد.

SAZE118.COM

جدول 3-1 انواع تیرهای حقیقی و مزدوج

تیر حقیقی	تیر مزدوج	تیر حقیقی	تیر مزدوج
			
			
			
			
			

* نکته 1: مزدوج سازه معین، یک سازه معین است. مزدوج یک سازه نامعین، یک سازه ناپایدار است که تحت بار $\frac{M}{EI}$، پایداری دارد.

* نکته 2: جهت بارگذاری $\frac{M}{EI}$، در قسمت‌هایی که علامت لنگر مثبت باشد به سمت پایین بوده و در قسمت‌هایی که علامت لنگر منفی باشدع به سمت بالا است.

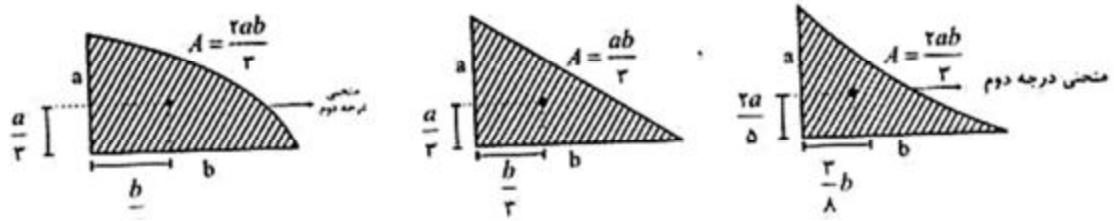
* نکته 3: تنها حالتی که امکان دارد، مزدوج یک سازه، نامعین شود، هنگامی است که سازه، ناپایدار باشد.

جهت مثبت قراردادی لنگر خمشی و نیروی برشی در تیرها به‌صورت زیر است:

(برش ساعتگرد لنگر به‌طوری که تارهای پایینی تیر، تحت کشش قرار گیرند)

مرکز هندسی اشکال مثلثی و منحنی درجه دوم نیز به‌صورت زیر است؟

SAZE118.COM

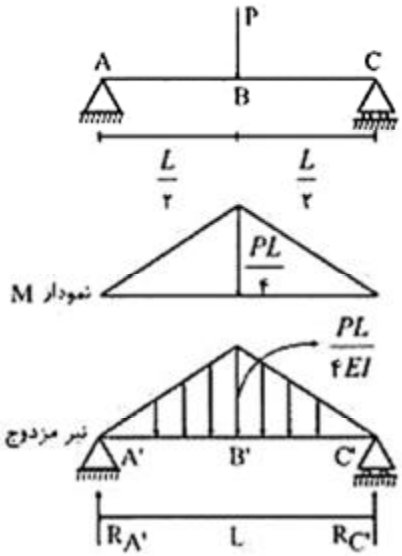


مثال ۱: کدام گزینه، مزدوج سازه مقابل است؟

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به جدول 3-1، گزینه «2» پاسخ صحیح است. ضمناً با توجه به نکته 1، از آنجا که سازه اصلی نامعین است، ملاحظه می‌شود که تیر مزدوج، ناپایدار است.

مثال ۲: θ_A , Δ_B در سازه مقابل کدام است؟



1) $\frac{PL^2}{16EI}, \frac{-PL^3}{48EI}$

2) $\frac{PL^2}{8EI}, \frac{PL^3}{48EI}$

3) $\frac{PL^2}{16EI}, \frac{PL^3}{24EI}$

4) $\frac{PL^2}{8EI}, \frac{-PL^3}{96EI}$

saze118.com

SAZE118.COM

حل: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

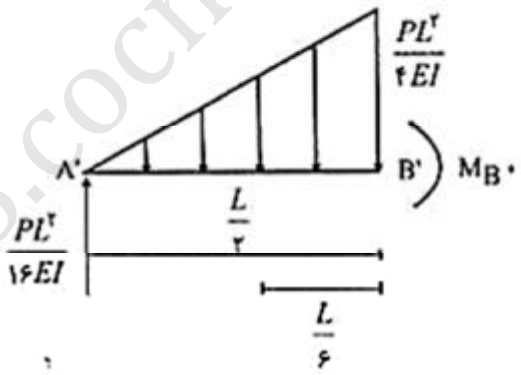
ابتدا نمودار لنگر خشمی سازه را رسم می‌کنیم و سپس، تیر مزدوج را تحت بار $\frac{M}{EI}$ قرار می‌دهیم. جهت بارگذاری، طبق نکته 2، به سمت پایین است.

با تحلیل تیر مزدوج، مقدار برش در تکیه‌گاه A'، که معادل شیب تکیه‌گاه A در سازه اصلی بوده، و مقدار لنگر در نقطه B'، که (با علامت منفی) معادل تغییر مکان نقطه B از سازه اصلی می‌باشد را به‌دست می‌آوریم.

$$\sum M_{C'}=0\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)L\times\frac{L}{2}-R_{A'}\times L=0\Rightarrow R_{A'}=\frac{PL^2}{16EI}=\theta_A$$

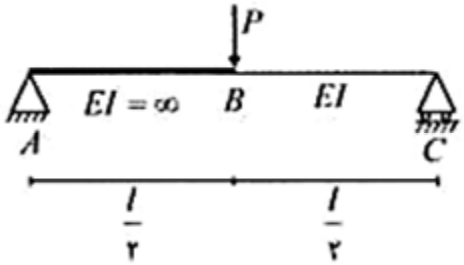
$$M_{B'}+\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{6}\right)-\frac{PL^2}{16EI}\left(\frac{L}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow M_{B'}=\frac{PL^3}{48EI}=-\Delta_B$$



* نکته 4: اگر در ناحیه‌ای از تیر مزدوج، بار گسترده‌ی q وجود نداشته باشد، برش در آن ناحیه از تیر مزدوج با دوران یا شیب در آن ناحیه از تیر اصلی ثابت است و لنگر در آن ناحیه از تیر مزدوج یا تغییر مکان در آن ناحیه از تیر اصلی به‌صورت خطی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر سازه در آن ناحیه دچار تغییر مکان صلب شده است.

مثال ۳: تغییر مکان نقطه B سازه مقابل کدام است؟



1) $\frac{PL^3}{16EI}$

2) $\frac{PL^3}{24EI}$

3) $\frac{PL^3}{32EI}$

4) $\frac{PL^3}{96EI}$

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با استفاده از نکته 4 و به روش تیر مزدوج سازه را تحلیل می‌کنیم. با به‌دست آوردن شیب تکیه‌گاه A و با توجه به صلب بودن قطعه AB، تغییر مکان B را محاسبه می‌کنیم.

saze118.com

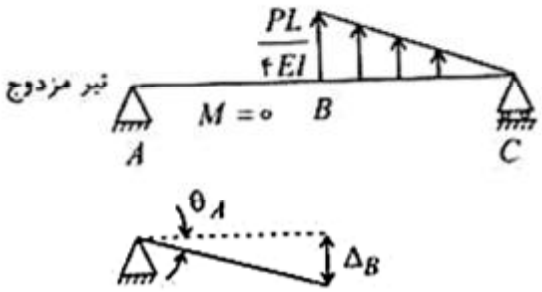
سنجش دانش

$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_A^C \cdot L = \left(\frac{PL}{4EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\right) * \frac{2}{3}\frac{L}{2}$$

$$\theta_A = R_A^C = \frac{PL^2}{48EI}$$

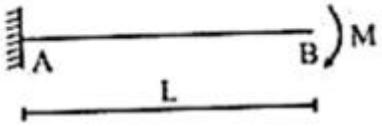
$$\Delta_B = \theta_A \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{96EI}$$

تغییر مکان صلب



منظور از R_A^C , R_A در تیر مزدوج است.

مثال ۴: Δ_B در سازه مقابل کدام است؟



1) $-\frac{ML^3}{3EI}$

2) $-\frac{ML^3}{2EI}$

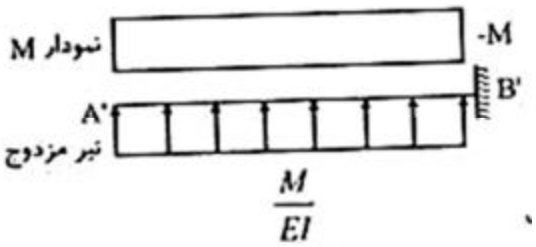
3) $-\frac{ML^2}{2EI}$

4) $-\frac{ML^2}{3EI}$

حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

لنگر خمشی سازه به‌صورت ثابت و برابر $(-M)$ است. تیر مزدوج را رسم می‌کنیم و آن را تحت بار $\frac{M}{EI}$ قرار می‌دهیم.

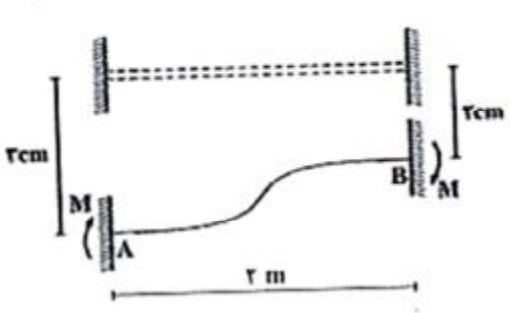
تغییر مکان نقطه B از سازه اصلی، برابر مقدار لنگر در B' از تیر مزدوج است.



$$M_{B'} = \left(\frac{M}{EI}\right)(L)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{ML^2}{2EI} = -\Delta_B$$

SAZE118.COM

مثال ۵: اگر تکیه‌گاه سمت چپ، 3cm و تکیه‌گاه سمت راست، 2cm نشست کنند، لنگر گیرداری ایجاد شده در تیر، در اثر نشست تکیه‌گاه‌ها کدام است؟



1) $\frac{EI}{200}$

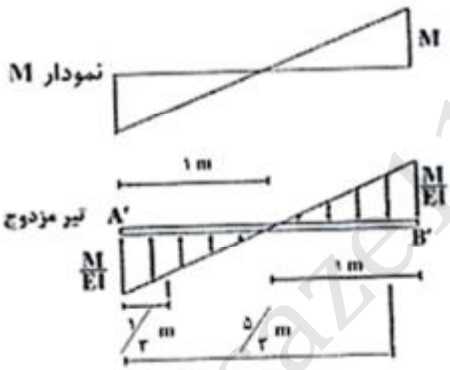
2) $\frac{EI}{100}$

3) $\frac{3EI}{200}$

4) $\frac{EI}{50}$

حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ابتدا نمودار لنگر خمشی را ترسیم می‌کنیم.



سپس تیر مزدوج را تحت بارگذاری $\frac{M}{EI}$ قرار می‌دهیم. می‌دانیم که Δ_A در تیر اصلی برابر لنگر خمشی در تیر مزدوج است. ملاحظه می‌شود که تیر مزدوج، یک سازه ناپایدار است که تحت بارگذاری موجود، پایدار است.

با نوشتن معادلات تعادل در نقطه A' خواهیم داشت:

$$\sum M_{A'}=0 \Rightarrow M_{A'}+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)(1)\left(\frac{5}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)(1)\left(\frac{L}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow M_{A'}+\frac{5M}{6EI}-\frac{M}{6EI}=0 \Rightarrow M_{A'}=-\frac{2M}{3EI}=-\Delta_A$$

$$\Rightarrow \Delta_A=\frac{2M}{3EI}$$

$$(0/03-0/02)=\frac{2M}{3EI} \Rightarrow M=\frac{0/03EI}{2}=\frac{3EI}{200}$$

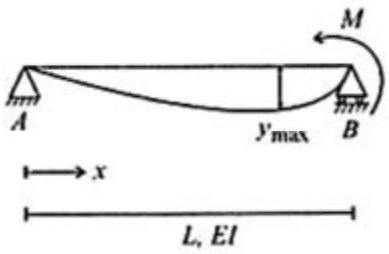
SAZE118.COM

کاربرد روش تیر مزدوج

الف) اگر بخواهیم تغییر مکان بیشینه ناشی از یک بارگذاری را تعیین کنیم از این روش استفاده می‌گردد.

برای این منظور باید به دنبال نقطه‌ای در تیر مزدوج باشیم که لنگر در آن نقطه بیشینه است. به عبارت دیگر برشی در آن نقطه از تیر مزدوج مساوی صفر باشد که معادل $\theta = 0$ در تیر اصلی می‌باشد.

مثال ۶: محل رخ دادن تغییر مکان بیشینه در سازه زیر کدام است؟ $(x = ?)$



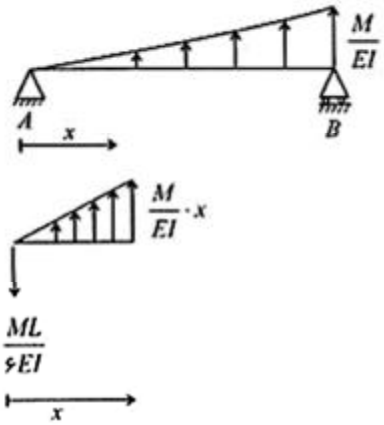
1) $\frac{L}{\sqrt{2}}$

2) $\frac{L}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{L}{2}$

4) $\frac{2L}{3}$

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A^C = \frac{M}{EI}.\frac{L}{2}.\frac{L}{3}.\frac{1}{L}$$

$$\rightarrow R_A^C = \frac{ML}{6EI}$$

$$\theta_x = V_x^c = \frac{M}{EI}.\frac{x}{L}.\frac{x}{2} - \frac{ML}{6EI} = 0$$

$$\text{محل تغییر مکان بیشینه سازه} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

ب) در صورتی‌که اختلاف شیب در یک اتصال مفصلی $(\theta_A^L \neq \theta_A^R)$ و یا اختلاف تغییر مکان در یک اتصال دو غلتکی $(\delta_A^L \neq \delta_A^R)$ مدنظر باشد.

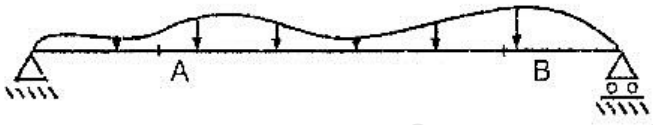
saze118.com

SAZE118.COM

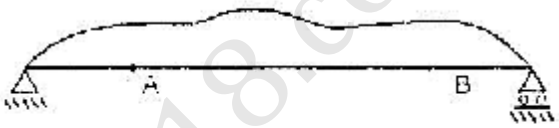
2-3- لنگر سطح

لنگر سطح روش نیمه ترسیمی و نیمه محاسباتی است . در این روش حدس زدن نحوه تغییر شکل قاب بسیار مهم می باشد.

تیر مقابل را با بار گذاری مفروض و دو نقطه B,A در نظر بگیرید.



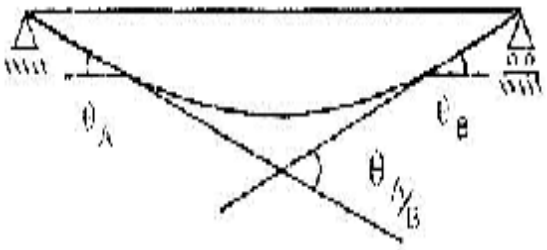
فرض کنید نمودار ممان تیر به صورت شکل پایین باشد.



از روش انتگرال مضاعف داریم:

$$q_{A/B} = q_B - q_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$\Rightarrow q_{A/B} = \frac{A_M}{EI}$$



A_M = مساحت زیر نمودار ممان از A تا B

قضیه اول لنگر سطح ازگفته های بالا نتیجه می شود.

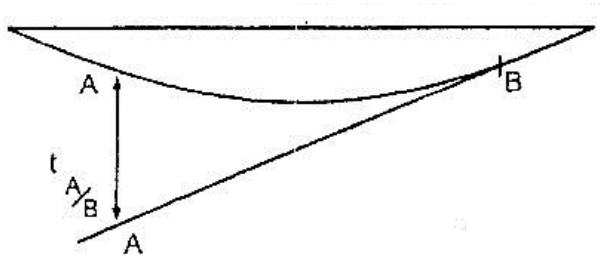
قضیه اول لنگر سطح: اختلاف زاویه دو نقطه B,A از تیر که با $q_{A/B}$ نشان داده می شود، برابر با سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ خواهد بود.

توجه: به نمودار $\frac{M}{EI}$ بار الاستیک می گویند.

توجه: بین دو نقطه B,A نباید مفصلی وجود داشته باشد.

SAZE118.COM

در شکل مقابل AA' برابر فاصله نقطه A از مماس رسم شده از نقطه B در راستای عمود بر محور تیر می باشد.

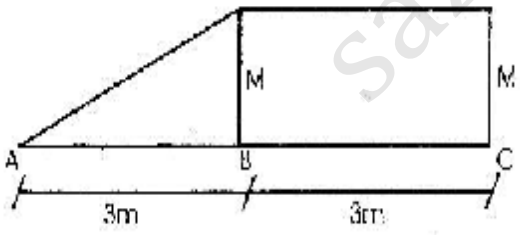


$$AA' = t_{A/B} = \int_A^B x dq = \int \frac{M}{EI} x dx$$

که عبارت $\int_A^B \frac{M}{EI}$ برابر ممان سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ از A تا B ، نسبت به A می باشد.

قضیه دوم لنگر سطح: فاصله نقطه A از مماس رسم شده از نقطه B، در راستای عمود بر محور تیر، برابر است با لنگر اول سطح $\frac{M}{EI}$ بین دو نقطه B,A نسبت به نقطه A

مثال: در صورتی که نمودار ممان قطعه پیوسته ای از سازه است به صورت مقابل باشد، فاصله نقطه C از مماس رسم شده از A چقدر است؟ (EI ثابت است)



1) $\frac{33}{2}M$

2) $\frac{21}{2}M$

3) $\frac{19}{2}M$

4) $\frac{15}{2}M$

حل: نمودار ممان همان نمودار بار الاستیک خواهد بود.

$$T_{C/A} = \frac{1}{2} \times M \times 3 \times (3 + \frac{1}{3} \times 3) + M \times 3\frac{3}{2} = \frac{21}{2}M$$

۳-۲ روش‌های انرژی

برای محاسبه تغییر مکان و شیب «قاب‌ها و خرپاهای معین» بهتر است از روش‌های انرژی استفاده شود. برخی از

SAZE118.COM

روش‌های انرژی عبارتند از روش کار حقیقی، روش کار مجازی (بار واحد) و قانون بتی – ماکسول. قبل از تشریح روش‌های مذکور، ابتدا روش محاسبه انرژی داخلی سازه را ذکر می‌کنیم.

انرژی داخلی ناشی از بار محوری برای میله‌ای با سطح مقطع ثابت A که تحت نیروی محوری P قرار دارد، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \qquad (1\text{-}3)$$

انرژی داخلی یک خرپا، که مجموعه‌ای از اعضای محوری است، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U = \sum \frac{P_i^2 L_i}{2A_i E} \qquad (2\text{-}3)$$

انرژی داخلی ناشی از خمش در تیری به طول L از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \qquad (3\text{-}3)$$

که در آن، M برابر لنگر خمشی در مقطع می‌باشد.

انرژی داخلی ناشی از تنش‌های برشی در یک تیر از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U = K\int_0^L \frac{V_x^2 dx}{2GA} \qquad (4\text{-}3)$$

که در رابطه فوق:

K = ضریب شکل است و مقدار آن برای مقاطع مستطیلی برابر 1/2، برای مقاطع دایره‌ای برابر $\frac{10}{9}$ و برای مقاطع I شکل برابر 1 می‌باشد.

V_x = نیروی برشی در مقطع

A = مساحت مقطع (در مقاطع I شکل فقط مساحت جان می‌باشد.)

G = مدول الاستیسیته برشی

انرژی داخلی ناشی از لنگر پیچشی T برای تیری به طول L و مقطع دایره‌ای شکل، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \qquad (5\text{-}3)$$

SAZE118.COM

که در آن J ممان اینرسی قطبی مقطع است و برابر $\frac{\pi r^4}{2}$ می‌باشد. (r = شعاع دایره)

انرژی داخلی یک نفر با ضریب سختی k، از رابطه زیر به‌دست می‌آید: (P نیروی داخلی فنر است)

$$U = \frac{P^2}{2k} \qquad (6\text{-}3)$$

۳-۲-۱ روش کار حقیقی

از این روش برای محاسبه «تغییر شکل سازه» استفاده می‌شود.

در این روش براساس اصل بقای انرژی، انرژی داخلی عضو، (که مجموع انرژی داخلی محوری، خمشی، برشی و پیچشی است و معادل انرژی کرنشی ذخیره شده توسط المان‌های داخلی سازه است) را برابر با کار خارجی انجام شده توسط یک بارگذاری متمرکز موجود قرار می‌دهیم تا تغییر مکان نقطه اعمال بار (در راستای اعمال بار) را به‌دست آوریم.

کار خارجی انجام شده توسط نیروی ثابت F که باعث جابه‌جایی Δ در عضو گردیده است برابر است با:

$$W = F.\Delta \qquad (7\text{-}3)$$

حال اگر نیروی P به‌طور تدریجی، باعث جابه‌جایی Δ گردد، کار خارجی انجام شده برابر است با:

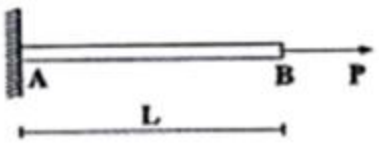
$$W = \frac{1}{2}P.\Delta \qquad (8\text{-}3)$$

کار انجام شده توسط لنگر پیچشی T که به‌طور تدریجی بر میله وارد گردد و موجب پیچش انتهای آزاد میله، به اندازه ϕ گردد برابر است با:

$$W = \frac{1}{2}T.\phi \qquad (9\text{-}3)$$

* نکته 5: روش تیر مزدوج زمانی کاربرد دارد که در سازه فقط یک نیروی متمرکز اعمال شده باشد و تغییر مکان متناظر با آن مدنظر باشد، یعنی از این روش نمی‌توان برای محاسبه تغییر مکان یک نقطه ناشی از یک بار گسترده و یا یک نقطه به جز محل بار استفاده کرد.

مثال ۷: تغییر مکان نقطه B از میله زیر، با سطح مقطع A که نیروی محوری P به‌طور تدریجی بر آن وارد می‌گردد، کدام است؟



1) $\frac{PL}{2AE}$
2) $\frac{PL}{AE}$
3) $\frac{2PL}{AE}$
4) $\frac{4PL}{AE}$

SAZE118.COM

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با استفاده از رابطه 3-1، انرژی داخلی میله، که تنها ناشی از نیروی محوری می‌باشد برابر است با:

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

اگر بار P به‌طور تدریجی بر میله وارد گرددع کار خارجی از رابطه 3-8 برابر است با:

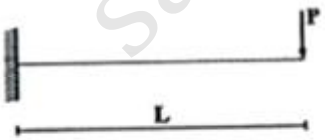
$$W = \frac{1}{2} P\Delta$$

با استفاده از روش کار حققی و از تساوی انرژی داخلی و کار خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} P.\Delta = \frac{P^2 L}{2AE} \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{AE}$$

* نکته 6: در محاسبه تغییر مکان تیرهای معمولی که در آن‌ها نسبت طول دهانه به ارتفاع مقطع آن‌ها، نسبت $\left(\frac{L}{h}\right)$ از 10 بزرگ‌تر است، تغییر مکان ناشی از برشی را نادیده می‌گیریم.

مثال ۸: تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره زیر، با مقطع A، در اثر نیروی تدریجی P کدام است؟



1) $\frac{PL^2}{2EI}$

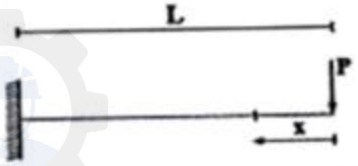
2) $\frac{3PL^2}{2EI}$

3) $\frac{PL^3}{3EI}$

4) $\frac{2PL^3}{3EI}$

حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با استفاده از نکته 6، انرژی داخلی ناشی از برش را نادیده می‌گیریم و تنها ارنژی دالخی ناشی از خمش را محاسبه می‌کنیم.



SAZE118.COM

$$U=\int_0^L \frac{(P.X)^2 dx}{2EI}=\int_0^L \frac{P^2X^2dx}{2EI}=\frac{P^2L^3}{6EI}$$

کار خارجی به ازاء بار تدریجی P برابر است با:

$$W=\frac{1}{2}P.\Delta$$

از تساوی انرژی داخلی و کار خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}P.\Delta=\frac{P^2L^3}{6EI}\Rightarrow\Delta=\frac{PL^3}{3EI}$$

پس تغییر مکان نقطه اعمال بار و در راستای بار به‌دست آمد، ولی برای دوران نقطه مذکور نمی‌شود از این روش استفاده کرد. پس این روش برای حالت‌های خاص بارگذاری متمرکز و در راستای بارگذاری صدق دارد.

۳-۲-۲ روش کار مجازی (بار واحد) (Virtual Work)

پر کاربردترین روش محاسبه تغییر مکان و شیب «قاب‌ها و خرپاها»، روش کار مجازی (بار واحد) است.

در این روش برای به‌دست آوردن تغییر مکان یک نقطه از اعضای خمشی، بار واحدی را در نقطه موردنظر از سازه و در جهت مورد نظر وارد می‌کنیم و تابع لنگر خمشی ناشی از آن بار (بدون بارهای دیگر) را برابر m در نظر می‌گیریم. اگر تابع لنگر خشمی ناشی از بارگذاری موجود را نیز با M نشن دهیم، آن‌گاه تغییر مکان نقطه موردنظر برابر است با:

$$1\times\Delta_{\text{اعضای خمشی}}=\int_0^L \frac{mMdx}{EI} \qquad (10\text{-}3)$$

برای به‌دست آوردن چرخش یک نقطه از اعضای خمشی، لنگر واحدی را در آن نقطه وارد می‌کنیم. اگر m تابع لنگر خمشی، ناشی از لنگر واحد در نقطه موردنظر باشد، چرخش آن نقطه برابر است با:

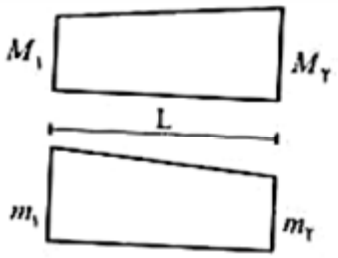
$$1\times\phi_{\text{اعضای خمشی}}=\int_0^L \frac{mMdx}{EI} \qquad (11\text{-}3)$$

برای محاسبه انتگرال موجود، در صورتی‌که نمودرا لنگرهای M و m را داشتهب اشیم. می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

SAZE118.COM

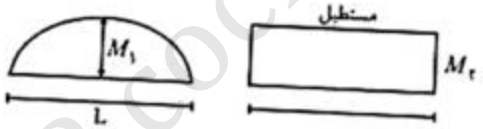
- اگر نمودارها به‌صورت 2 ذوزنقه باشند (مستطیل و مثلث را نیز شامل می‌شود):

$$\int_0^L \frac{mMdx}{EI} = [2(M_1m_1 + M_2m_2) + (M_1m_2 + M_2m_1)]\frac{L}{6EI} \qquad (12\text{-}3)$$

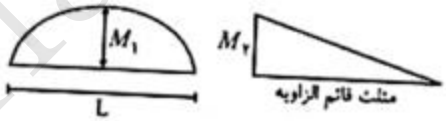


- اگر یکی از نمودارها سهمی متقارن باشد:

$$\int_0^L \frac{mMdx}{EI} = \frac{3}{2}(M_1)(m_2)\frac{L}{EI} \qquad (13\text{-}3)$$

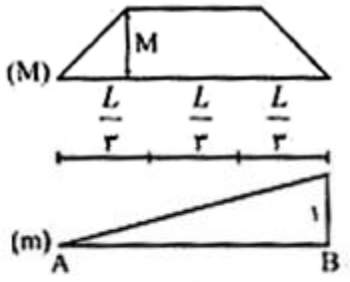


$$\int_0^L \frac{mMdx}{EI} = \frac{1}{3}(M_1)(m_2)\frac{L}{EI} \qquad (14\text{-}3)$$



$$\int_0^L \frac{mMdx}{EI} = \frac{5}{12}(M_1)(m_2)\frac{L}{MI} \qquad (15\text{-}3)$$

مثال ۹: اگر نمودار لنگر خمشی یک تیر، در اثر بارگذاری به‌صورت نمودار M و نمودار لنگر خمشی در اثر لنگر واحد در تکیه‌گاه B به‌صورت نمودار m باشد، شیب نقطه B کدام است؟



1) $\frac{ML}{3EI}$

2) $\frac{2ML}{9EI}$

3) $\frac{5ML}{27EI}$

4) $\frac{7ML}{54EI}$

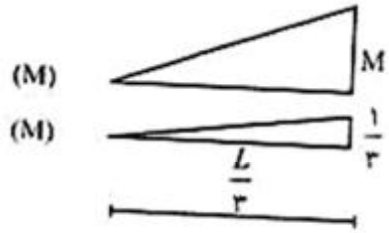
SAZE118.COM

سنجش دانش

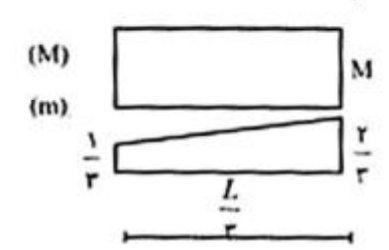
حل: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

مشخص است که نمی‌توان انتگرال رابطه 3-11 را به تنهایی تعیین نمود، بنابراین آن‌ار به سه انتگرال تقسیم می‌کنیم:

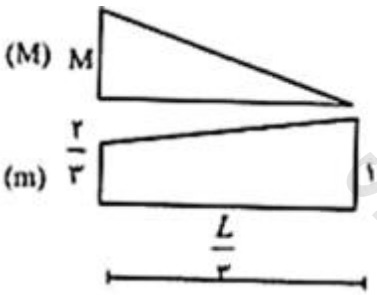
$$1\times\theta_B=\int_0^L\frac{mMdx}{EI}=\int_0^{\frac{L}{3}}\frac{mMdx}{EI}+\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}}\frac{mMdx}{EI}+\int_{\frac{2L}{3}}^{L}\frac{mMdx}{EI}$$



$$(1)\xrightarrow{(12-3)}\left[2\left(0\times0+M\times\frac{1}{3}\right)+\left(0\times\frac{1}{3}+M\times0\right)\right]\frac{\left(\frac{L}{3}\right)}{6EI}=\frac{ML}{27EI}$$



$$(2)\xrightarrow{(12-3)}\left[2\left(M\times\frac{1}{3}+M\times\frac{2}{3}\right)+\left(M\times\frac{2}{3}+M\times\frac{1}{3}\right)\right]\frac{\left(\frac{L}{3}\right)}{6EI}=\frac{ML}{6EI}$$



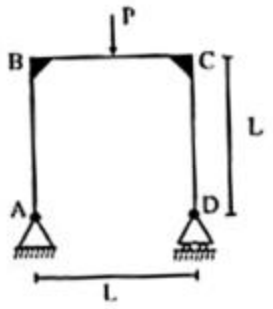
$$\xrightarrow{(12-3)}\left[2\left(M\times\frac{2}{3}+0\times1\right)+\left(M\times1+0\times\frac{2}{3}\right)\right]\frac{\left(\frac{L}{3}\right)}{6EI}=\frac{7ML}{54EI}$$

$$1\times\theta_B=\frac{ML}{27EI}+\frac{L}{6EI}+\frac{7ML}{54EI}=\frac{ML}{3EI}$$

saze118.com

SAZE118.COM

مثال ۱۰: تغییر مکان وسط دهانه BC (تنها در اثر تغییر شکل خمشی) کدام است؟



1) $\frac{PL^3}{24EI}$

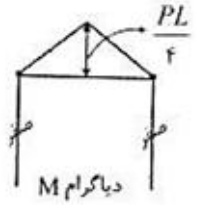
2) $\frac{PL^3}{48EI}$

3) $\frac{3PL^3}{24EI}$

4) $\frac{3PL^3}{48EI}$

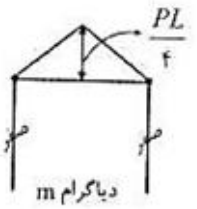
حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

نمودار لنگر خشمی را برای بارگذاری داده شده رسم می‌کنیم. سپس بار واحدی را در وسط دهانه BC، به تنهای وارد کرده و نمودار لنگر خمشی آن‌را نیز رسم می‌کنیم.



با استفاده از روش کار مجازی، می‌دانیم که Δ از رابطه 3-10 به‌دست می‌آید.

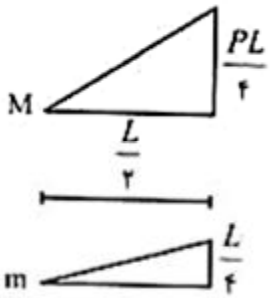
با توجه به شکل نمودارها، ملاحظه می‌شود که هر نمودار از 2 مثلث تشکیل شده است.



با استفاده از رابطه 3-12، نمی‌توان انتگرال را به تنهایی محاسبه کرد.

بنابراین انتگرال را به 2 انتگرال تبدیل می‌کنیم:

$$\int_0^L \frac{mMdx}{EI} = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{mMdx}{EI} + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{mMdx}{EI}$$



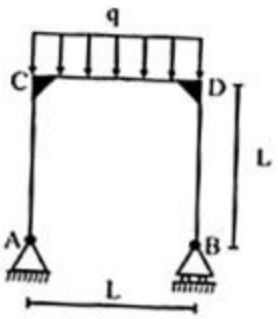
$$\left(0\times0+\frac{PL}{4}\times\frac{L}{4}\right)+\left(0\times\frac{L}{4}+\frac{PL}{4}\times0\right)\Big]\frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{6EI}=\frac{PL^3}{96EI}$$

SAZE118.COM

با استفاده از تقارن، مشخص است که حاصل‌ضرب دو مثلث سمت راست نیز که انتگرال (2) را تشکیل می‌دهند برابر $\frac{PL^3}{96EI}$ خواهد بود بنابراین داریم:

$$\int_0^L \frac{mMdx}{EI} = \frac{PL^2}{96EI} + \frac{PL^3}{96EI} = \frac{PL^3}{48EI}$$

مثال ۱۱- دوران گره C کدام است؟



1) $\frac{5qL^3}{48EI}$

2) $\frac{5qL^3}{24EI}$

3) $\frac{qL^3}{48EI}$

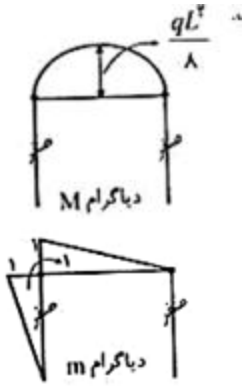
4) $\frac{qL^3}{24EI}$

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

نمودار لنگر خمشی را برای بارگذاری داده شده رسم می‌کنیم.

سپس، لنگر واحد را در نقطه C، به تنهایی وارد کرده و نمودار لنگر خمشی آن‌را نیز رسم می‌کنیم. با استفاده از روش کار مجازیع مشخص است که حاصل‌ضرب نمودارهای عضو AC، به دلیل صفر بودن یکی از آن‌ها، برابر صفر است.

بنابراین، تنها انتگرال را برای عضو CD حساب می‌کنیم و داریم:



$$1\times\phi_c = \int_0^L \frac{mMdx}{EI} \xrightarrow{(14-3)} \frac{1}{3}\left(\frac{qL^2}{8}\right)(1)\left(\frac{L}{EI}\right) = \frac{qL^3}{24EI}$$

از روش کار مجازی، برای محاسبه «تغییر مکان در خرپاها» به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

ابتدا نیروی داخلی اعضای خرپا را در اثر بارگذاری خارجی محاسبه می‌کنیم و نیروی هر عضو را با N نمایش می‌دهیم.

saze118.com

سپس، در گره‌ای که قرار است تغییر مکان آن‌را محاسبه کنیم و در جهت موردنظرع بـار واحـدی را وارد کـرده و مجـدداً خرپا را تحلیل می‌کنیم. این بار نیروی داخلی هر عضو را با n نمایش می‌دهیم. تغییر مکان گره در جهت مورد نظر، بـرای خرپایی با m عضو برابر است با:

$$1\times\Delta=\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i N_i L_i}{A_i E} \qquad (16\text{-}3)$$

در صورتی‌که، علاوه بر بارگذاری خارجی، تغییر درجه حرارت در برخـی از اعضـاء نیـز وجـود داشـته باشـد، رابطـه قبـل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$1\times\Delta=\sum_{i=1}^{m}n_i\left(\frac{N_i L_i}{A_i E}+\alpha L_i\Delta T_i\right) \qquad (17\text{-}3)$$

که در آن α ضریب انبساط حرارتی اعضاء و ΔT_i، تغییر درجه حرارت هر عضو می‌باشد.

* نکته 7: اگر تکیه‌گاه سازه‌ای که به روش کار مجازی بررسی می‌شود، دارای نشست باشد، بـه سـمت چـپ تسـاوی، در روابط 3-10، 3-11 و 3-16 و 3-17، عبارت $\sum r_i\delta_i$ نیز افزوده می‌شود که برابر است با کار انجام شده در اثـر بـار (یـا لنگر) واحد در تکیه‌گاه‌های دارای نشست. (δ_i نشست تکیه‌گاه و r_i، عکس‌العمل تکیه‌گاه در اثر اعمال بار (یا لنگر) واحد در نقطه موردنظر هستند)

* نکته 8: در سازه‌های معین تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی، هیچ‌گونه تنش و نیرویی در اعضـائ بـه‌وجـود نمـی‌آیـد و سازهع تنها یک حرکت صلب خواهد داشت.

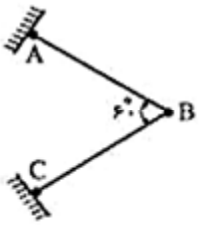
رابطه کلی کار مجازی برای عضوی که تحت خمش، نیروی محوری، برش و پیچش باشد، به‌صورت زیر است؟

$$1\times\Delta=\int\frac{mMdx}{EI}+\int\frac{nNdx}{AE}+\int\frac{vVdx}{GA}+\int\frac{tTdx}{GJ} \qquad (18\text{-}3)$$

که در آن‌ها t,v، برش و پیچش در اثر بار واحد می‌باشند.

SAZE118.COM

مثال ۱۲: اگر در خرپای زیر، دمای عضو AB به میزان ΔT کاهش یابد و دمای عضو BC به اندازه ΔT افزایش یابد، تغییر مکان عمودی مفصل B کدام خواهد بود؟



1) $\alpha L\Delta T$

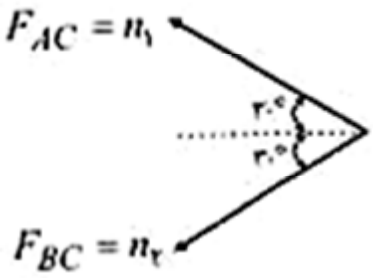
2) $\sqrt{2}\alpha L\Delta T$

3) $\sqrt{3\alpha L\Delta T}$

4) $2\alpha L\Delta T$

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با استفاده از روش کار مجازی، بار واحدی را در جهت عمودی به مفصل B وارد می‌کنیم و آن‌را تحلیل می‌نماییم.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} n_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = -n_2 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} n_1 - \frac{1}{2} n_2 - 1 = 0 \xrightarrow{(1)} n_1 = n_2 = 1$$

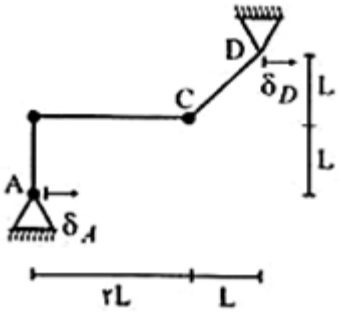
به دلیل وجود تغییرات حرارتی، از رابطه 17-3 استفاده می‌کنیم و چون بارگذاری خارجی وجود ندارد، ترم اول آن حذف خواهد شد و داریم:

$$1 \times \Delta = 1 \times \left(\alpha L\left(-\Delta T\right)\right) + \left(-1\right)\left(\alpha L\Delta T\right) = -2\alpha L\Delta T$$

علامت منفی نشانگر این است که جهت تغییر مکان عمودی برخلاف جهت نیروی واحد و به سمت بالا می‌باشد.

SAZE118.COM

مثال ۱۳: در قاب زیر، $\delta_D = \frac{L}{500}, \delta_A = \frac{L}{1000}$ هستند. دوران گره B کدام است؟



1) $\frac{1}{500}$

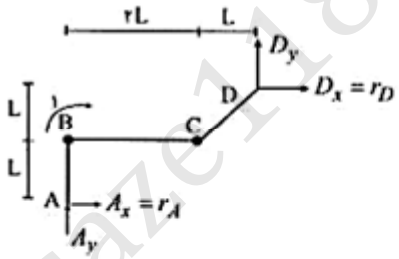
2) $\frac{1}{600}$

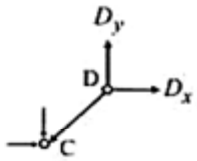
3) $\frac{1}{800}$

4) $\frac{1}{1000}$

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با استفاده از روش کار مجازی در گره B، لنگر واحدی اعمال می‌کنیم و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های A و D را محاسبه می‌کنیم.





$$\sum M_c = 0$$

$$D_y(L) - D_x(L) = 0 \Rightarrow D_x = D_y \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow D_y(3L) - 1 - D_x(2L) = 0 \xrightarrow{(1)} D_y = \frac{1}{L}$$

$$(1) \Rightarrow D_x = r_D = \frac{1}{L}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = r_A = -\frac{1}{L}$$

در رابطه 3-11، از آن‌جا که نیروی خارجی نداریم، طرف راست تساوی برابر صفر خواهد بود و با توجه به نکته 7، رابطه 3-11 به‌صورت زیر در می‌آید:

$$1\times\theta + \sum r_i\delta_i = 0$$

$$1\times\theta + \left(\left(-\frac{1}{L}\right)\left(\frac{L}{1000}\right) + \frac{1}{L}\left(\frac{L}{500}\right)\right) = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{1000}$$

SAZE118.COM

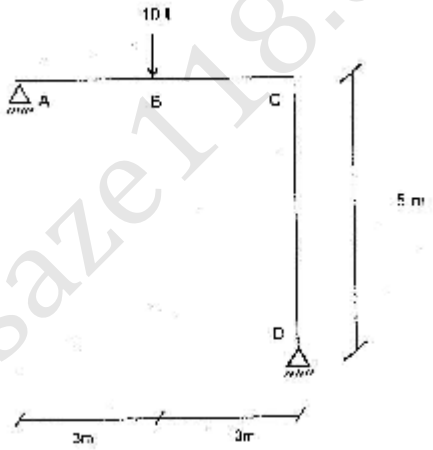
تحلیل سازه های نامعین با استفاده از روش تغییر مکانهای سازگار

در تحلیل سازه های نامعین دو روش وجود دارد،روش نیرو یا نرمی و روش تغییر مکان یا سختی، از روش نیرو یا تغییر مکانهای سازگار در سازهایی با درجه نامعینی پایین، 1 درجه یا حداکثر 2 درجه، استفاده می شود و حل سازه ها با درجه نامعینی بالا با استفاده از روش های پخش لنگر یا شیب افت انجام می شود.

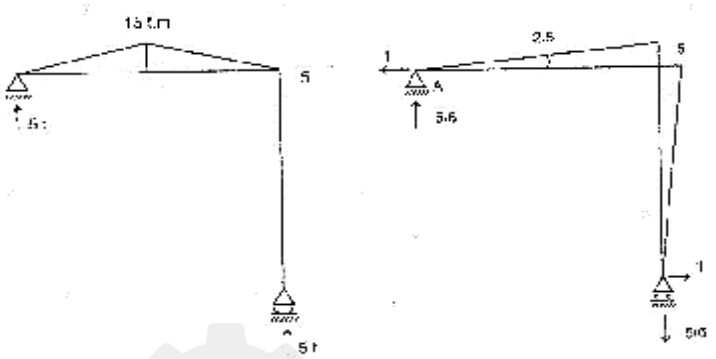
در حل مساله از روش تغییر مکان سازگار، ابتدا قیدهای نامعینی سازه را برداشته، سپس تغییر مکان سازه در جهت آن نیروها را بدست می آوریم و نیروهای در خلاف جهت تغییر مکان ها وارد کرده تا همان تغییر مکان را درجهت عکس ایجاد کند.

مثال: نیروی افقی تکیه گاه D را بیابید.

ابتدا قید افقی تکیه گاه D را برداشته و نمودار ممان را برای سازه های جدید و سازه با بار واحد رسم کنید.



$$1\times\Delta=\frac{3}{6EI}[2\times15\times2/5]$$
$$+\frac{3}{6EI}[2\times2/5\times15+5\times15]$$
$$\Rightarrow\Delta=\frac{112/5}{EI}$$



SAZE118.COM

حال جابجایی تکیه گاه D ناشی از بار واحد درتکیه گاه D را بدست می آوریم ، Δ' ، با حساب کردن نسبت $-\frac{\Delta}{\Delta'}$ ، نیرو و جهت عکس العمل افقی تکیه گاه D نسبت به بار واحد بدست می آید.

$$\Delta'=\frac{5}{6EI}[2\times5\times5]=\frac{6}{6EI}[2\times5\times5]=\frac{550}{6EI}$$

نیروی افقی تکیه گاه D

$$-\frac{\Delta}{\Delta'}=-\frac{\frac{112/5}{EI}}{\frac{550}{6EI}}=-1/23t$$

علامت منفی نشان می دهد که این نیرو باید در خلاف جهت بار واحد اعمال گردد.

saze118.com

SAZE118.COM

نکات کلیدی فصل سوم

Ÿ برای هر عضو پیوسته قاب دو رابطه زیر که روابط انتگرال مضاعف می باشند، برقرارمی باشد.

$$q(x)=\int \frac{M}{EI}dx, y(x)=\int q(x)dx=\iint \frac{M}{EI}dx$$

Ÿ قضیه اول و دوم لنگر سطر به صورت زیر می باشند.

سطح زیر نمودار بار الاستیک از A تا $q_{A/B}=q_B-q_A=\int_A^B \frac{M}{EI}dx=B$: قضیه اول لنگر سطح

ممان سطح زیر بار الاستیک از A تا B نسبت به $t_{A/B}=\int_A^B \frac{M}{EI}xdx=A$: قضیه دوم لنگر سطح

Ÿ دو قضیه لنگر سطح برای دهانه های پیوسته و بدون مفصل صادق هستند.

Ÿ برش در تیر مزدوج برابر شیب در تیر اصلی و ممان در تیر مزدوج برابر تغییر مکان در تیر اصلی می باشد.

Ÿ ناپایدار بودن تیر مزدوج به معنای نامعین بودن تیر اصلی، نامعین بودن تیر مزدوج به معنای ناپایدار بودن تیر اصلی می باشد.

Ÿ تیر مزدوج، تیر مزدوج، تیر اصلی خواهد شد.

Ÿ انرژی داخلی ذخیره شده در سازه برابر است با کار خارجی انجام شده است:

$$W_{\text{int}}=\frac{1}{2}P\Delta$$

Ÿ رابطه کلی بار واحد برای قاب ها به صورت زیر می باشد:

$$1\times\Delta+W_R=\int nds+\int mdq,\int vdl+\int tdf$$

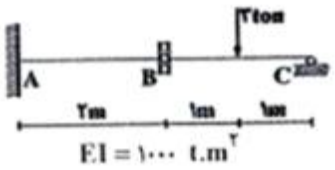
Ÿ در هنگام ترکیب ممان سازه اصلی با ممان بار واحد، به هم علامت بدون و یا نبودن دو نمودار دقت کنید.

saze118.com

SAZE118.COM

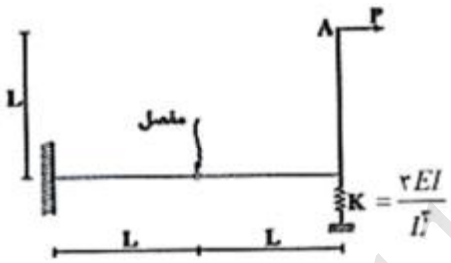
تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱- در تیر شکل مقابل تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی B برحسب mm کدام است؟



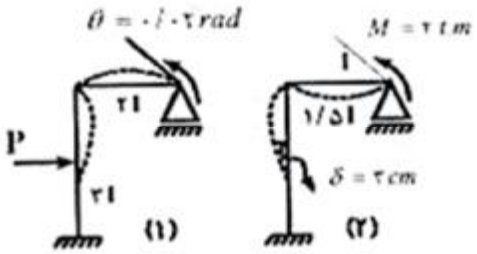
1) 0
2) 6
3) 5
4) 3

۲- جابه‌جایی افقی انتهای آزاد A تحت اثر بار متمرکز P چقدر است؟



1) $\frac{PL^3}{EI}$
2) $\frac{2PL^3}{3EI}$
3) $\frac{4PL^3}{3EI}$
4) $\frac{5PL^3}{3EI}$

۳- با توجه به اشکال ۱ و ۲ مقدار P چقدر است؟



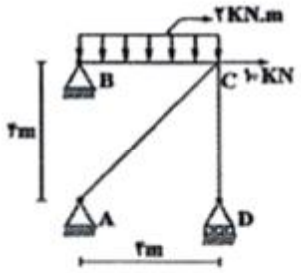
1) $P = -1ton$
2) $P = \frac{2}{3}ton$
3) $P = \frac{4}{3}ton$
4) $P = \frac{8}{3}ton$

saze118.com

SAZE118.COM

۴- با صرف‌نظر کردن از اثر نیروی محوری در قطعه BCD، مقدار F_{AC} کدام است؟

E = ثابت , I (کلیه اعضاء) $=100cm^4$, AC سطح مقطع میله $=2cm^2$



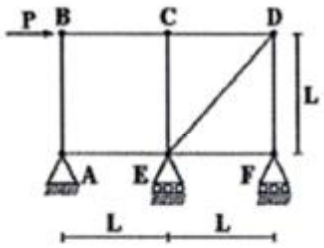
1) صفر

2) 5KN

3) 10KN

4) 20KN

۵- خرپای شکل مقابل مفروض است. اگر صلبیت محوری اعضا برابر EA باشد، تغییر مکان افقی B کدام است؟



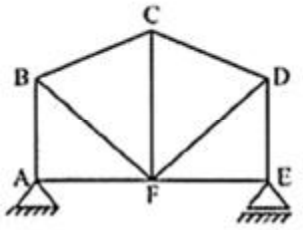
1) $\frac{2PL}{EA}\left(1+\sqrt{2}\right)$

2) $\frac{4PL}{EA}\left(1+\sqrt{2}\right)$

3) $\frac{2PL}{EA}\left(2+\sqrt{2}\right)$

4) $\frac{4PL}{EA}\left(1+2\sqrt{2}\right)$

۶- در خرپای شکل زیر CF در حین اجرا ۲ سانتی‌متر کوتاه‌تر اجرا شده است. تغییر مکان افقی نقطه D را پس از مونتاژ حساب کنید. (می‌دانیم در صورتی که این خرپا تحت اثر بار افقی 7ton از چپ به راست قرار گیرد نیروی داخلی میله CF برابر $-2/625ton$ - (فشاری) می‌باشد.)



1) $0/75cm$ به سمت چپ

2) $0/75cm$ به سمت راست

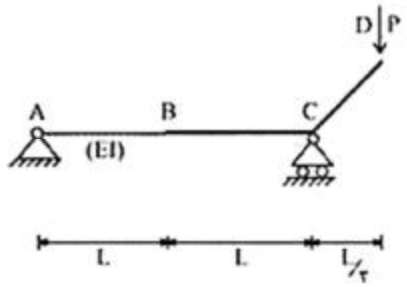
3) $5/25cm$ به سمت راست

4) برای محاسبه، ابعاد هندسی سازه می‌بایست داده شده و خرپا تحلیل گردد.

saze118.com

SAZE118.COM

۷- قطعه **BCD** صلب است؟ $\left(\Delta B_y = ?\right)$



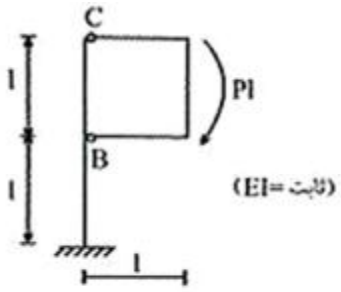
1) $\frac{Pl^3}{24EI}$

2) $\frac{Pl^3}{3EI}$

3) $\frac{Pl^3}{12EI}$

4) $\frac{Pl^3}{8EI}$

۸- $\Delta B_x = ?$:



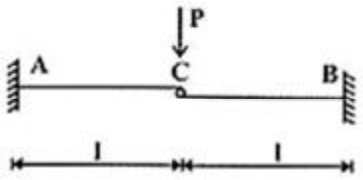
1) $-\frac{Pl^3}{3EI}$

2) $-\frac{Pl^3}{2EI}$

3) $-\frac{Pl^3}{8EI}$

4) $-\frac{2Pl^3}{EI}$

۹- $M_A = ?$:



1) Pl

2) $\frac{Pl}{4}$

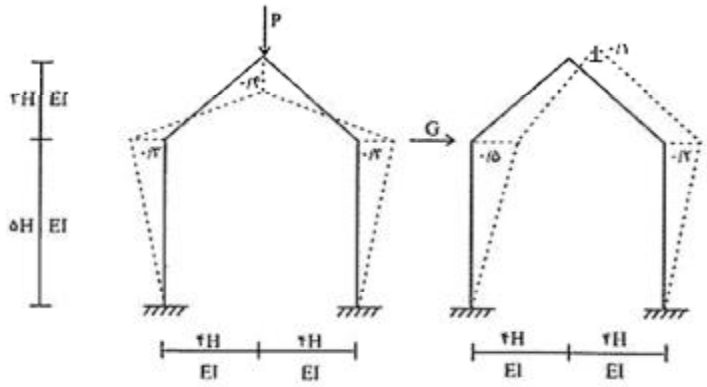
3) $\frac{Pl}{2}$

4) صفر

saze118.com

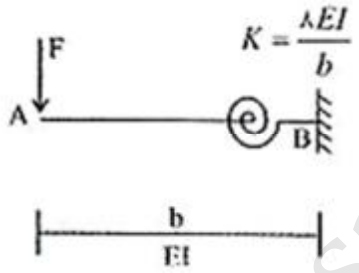
saze118.com

۱۰- چه رابطه‌ای بین P و Q در قابل دروازه‌ای زیر برقرار است؟



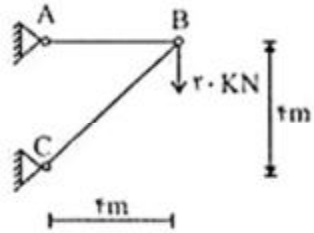
1) $P = Q$
2) $P = 2Q$
3) $P = -3Q$
4) $P = 3Q$

۱۱- هنگامی که خمش مؤثیر باشد دوران A چه مقدار دارد؟



1) $\frac{5Fb^2}{8EI}$
2) $\frac{Fb^2}{2EI}$
3) $\frac{5Fb^2}{6EI}$
4) $\frac{3Fb^2}{4EI}$

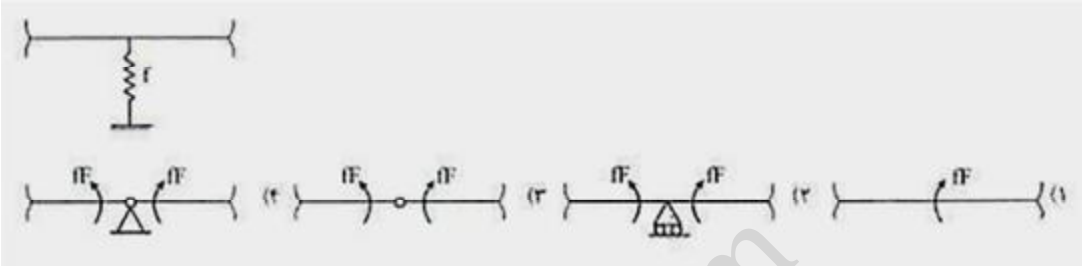
۱۲- $\Delta B_x = ?$, $25cm^2$ = (سطح مقطع میله‌ها) A و ثابت = E:



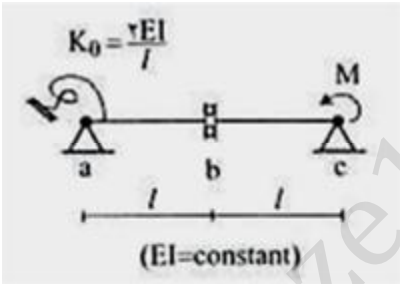
1) $\frac{64000}{E}$
2) $\frac{32000}{E}$
3) $\frac{16000}{E}$
4) $\frac{12000}{EI}$

SAZE118.COM

۱۳- تکیه‌گاهی میانی فنری به‌صورت شکل مقابل مفروض است. نظیر این تکیه‌گاه در تیر مزدوج مطابق کدام‌یک از گزینه‌ها است؟ **f** ضریب نرمی فنر است و **F** نیروی کششی فنر می‌باشد. (ضریب نرمی عکس ضریب سختی است.)



۱۴- در تیر شکل مقابل تغییر مکان در سمت چپ مفصل برشی **b** کدام است؟



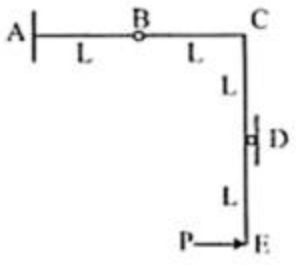
1) 0

2) $\frac{Ml^2}{EI}$

3) $\frac{Ml^2}{3EI}$

4) $\frac{Ml^2}{3EI}$

۱۵- در سازه نشان داده شده حداکثر جابه‌جایی قائم مفصل **B** چقدر است؟ (**EI** برای کلیه اعضاء ثابت)



1) صفر

2) $\frac{PL^3}{EI}$

3) $\frac{PL^3}{3EI}$

4) $\frac{2PL^3}{3EI}$

SAZE118.COM

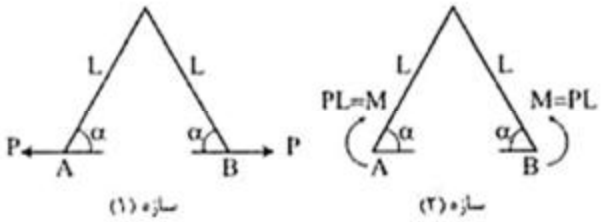
۱۶- نسبت تغییر فاصله **A** و **B** در سازه (۱) به تغییر فاصله **A** و **B** در سازه (۲) چقدر است؟ $\frac{(\delta_{AB})_1}{(\delta_{AB})_2}$ (فقط اثرات خمش را در نظر بگیرید.) **EI** کلیه عضوهای دو سازه یکسانند.

1) $\sin\alpha$

2) $\frac{2}{3}\sin\alpha$

3) $\frac{1}{3}\sin\alpha$

4) $\frac{1}{2}\sin\alpha$



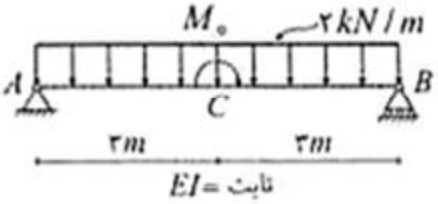
۱۷- M_0 را آن‌چنان تعیین کنید که θ_C برابر ۰/۰۲ رادیان گردد.

1) 0/01EI

2) 0/02EI

3) 0/04EI

4) 0/08EI



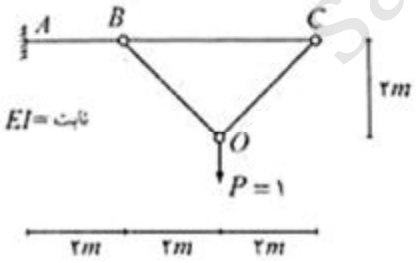
۱۸- تغییر مکان قائم نقطه **B** را حساب کنید. از اثر نیروی محوری صرف‌نظر کنید.

1) $\frac{4EI}{3}$

2) $\frac{8EI}{3}$

3) $\frac{10EI}{3}$

4) $\frac{2}{3EI}$



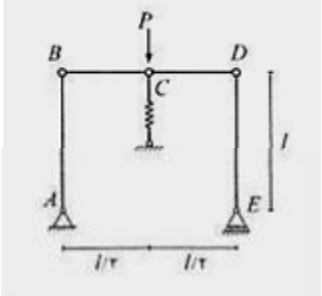
۱۹- صلبیت خمشی اعضای قاب شکل مقابل **EI** و ضریب فنریت فنر **C** برابر $\frac{L^2}{48EI}$ می‌باشد. نیروی فنر را محاسبه کنید.

1) صفر

2) $\frac{P}{2}$

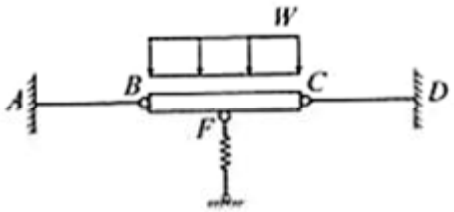
3) $\frac{P}{3}$

4) P



SAZE118.COM

۲۰- تیر ABFCD در نقاط B و C دارای مفصل است. قسمت BC به طول L و صلبیت خمشی بی‌نهایت و قسمت AB و CD به طول L و صلبیت خمشی EI می‌باشد. فنر F در وسط تیر BC قرار دارد و ضریب فنریت آن $\frac{L^3}{2EI}$ است. نیروی محوری فنر محاسبه کنید.



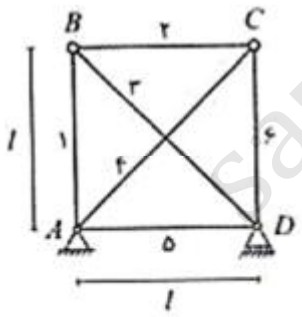
1) صفر

2) $\frac{WL}{4}$

3) WL

4) $\frac{WL}{2}$

۲۱- خرپای نامعین شکل زیر مفروض است اگر بر اثر بارگذاری خارجی نیروی محوری اعضای F_i را بنامیم، تغییر مکان افقی C برابر است با: (EA همه اعضاء یکسان است.)



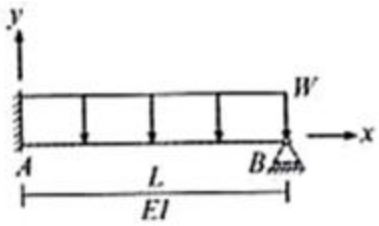
1) $\frac{L}{EA}(\sqrt{2}F_4 - F_6)$

2) $\frac{L}{EA}(F_4 - 2F_6)$

3) $\frac{L}{EA}(3F_4 - F_6)$

4) $\frac{L}{EA}(F_4 - \sqrt{2}F_6)$

۲۲- تابع خیزه‌ساز زیر کدام است؟



1) $y = (\frac{W}{24EI})(L^2x^2 - x^4)$

2) $y = (\frac{W}{24EI})(6L^2x^2 - 3x^4)$

3) $y = (\frac{W}{24EI})(6L^2x^2 - x^4 - 5L^4)$

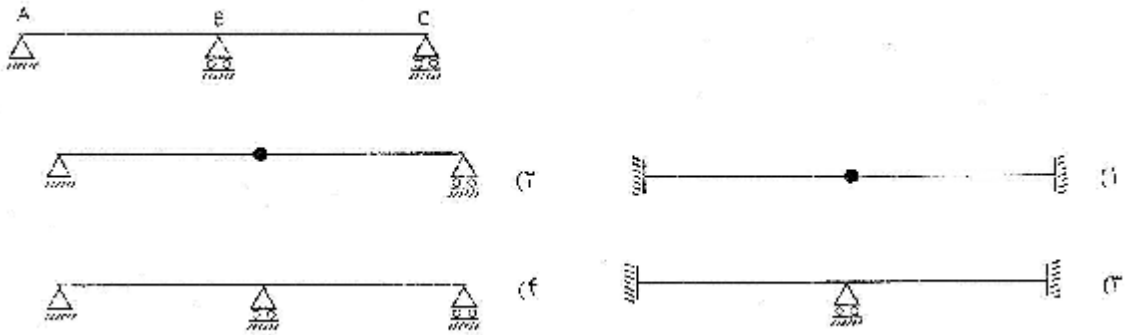
4) $y = (\frac{W}{24EI})(6L^2x^2 - x^4 - 5L^3x)$

saze118.com

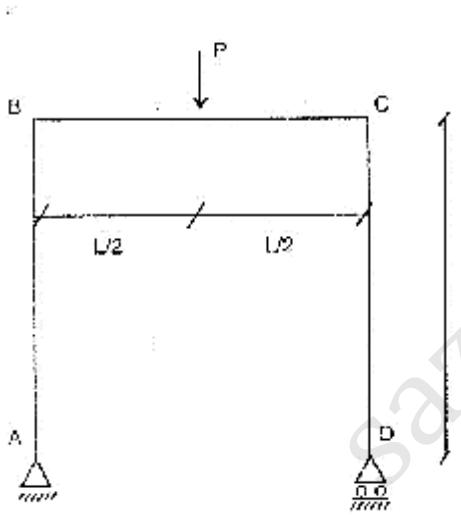
SAZE118.COM

سنجش دانش

۲۳- کدام یک از چهار حالت زیر تیر مزدوج تیر ABC می باشد؟



۲۴- برای قاب نشان داده شده در شکل زیر مطلوبست محاسبه تغییر مکان افقی تکیه گاه D (EI ثابت است)



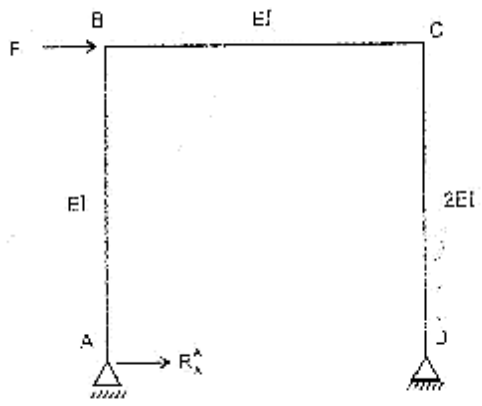
۱) $\frac{PL^2H}{8EI}$

۲) $\frac{PL^2H}{4EI}$

۳) $\frac{PL^2H}{16EI}$

۴) $\frac{PL^2H}{12EI}$

۲۵- در قاب شکل زیر طول کلیه اعضا یکسان است. نیروی عکس العمل R_X^A را بدست آورید.



۱) $-\frac{7}{24}F$

۲) $-\frac{4}{9}F$

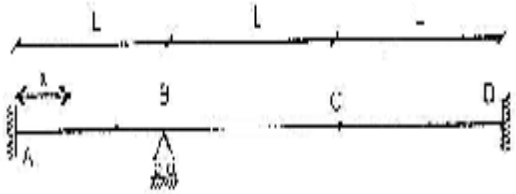
۳) $\frac{4}{9}F$

۴) $-\frac{3}{12}F$

saze118.com

SAZE118.COM

۲۶- در تیر ABCD زیر چنانچه در اثر نوعی بارگذاری لنگر خمشی در دهانه های مختلف برابر با $M_{AB}=2L-6x$ ، $M_{CD}=-7x+14L, M_{BC}=4x-8L$ **باشد. تغییر مکان قائم مفصل C برابر است با :**
(صلبیت خمشی ثابت و برابر $l=3m, EI=3000c.m^2$ **می باشد. تغییر مکان به سمت بالا مثبت در نظر گرفته می شود)**



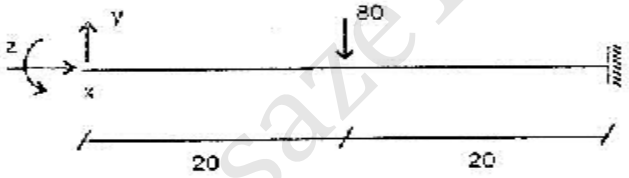
۱) $d_C=1/4cm$

۲) $d_C=-2/1cm$

۳) $d_C=-1/4cm$

۴) $d_C=2/8cm$

۲۷- در سازه مطابق شکل انرژی ذخیره شده مینیمم است اگر : $GA=\infty, EA=20, EI=300$



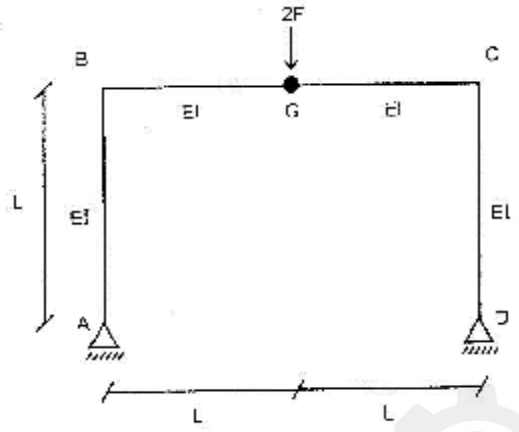
۱) $X=20 \quad , \quad Y=70 \quad , \quad Z=420$

۲) $X=0 \quad , \quad Y=40 \quad , \quad Z=400$

۳) $X=40 \quad , \quad Y=40 \quad , \quad Z=420$

۴) $X=0 \quad , \quad Y=60 \quad , \quad Z=375$

۲۸- تغییر فاصله G نسبت به A چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{2}FL^3}{3EI}$

۲) $\frac{\sqrt{2}FL^3}{3EI}$

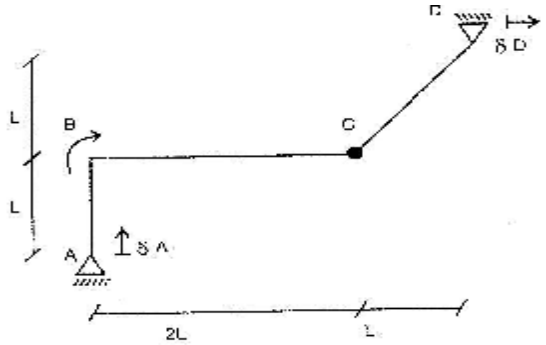
۳) $\frac{EL^3}{\sqrt{2}EI}$

۴) $\frac{FL^3}{EI}$

saze118.com

SAZE118.COM

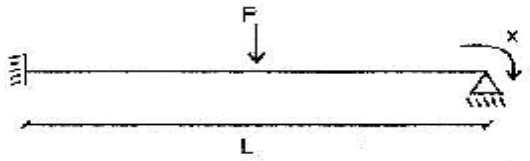
۲۹- قاب شکل زیر دارای طبیعت مقاطع یکسان، رفتار خطی و نشست های تکیه گاهی $d_D = \frac{L}{500}, d_D = \frac{L}{1000}$ است. مقدار دوران گره B بر اثر نشست ها چند رادیان است؟



۱) $\frac{1}{500}$ ۲) $\frac{1}{600}$

۳) $\frac{1}{800}$ ۴) $\frac{1}{1000}$

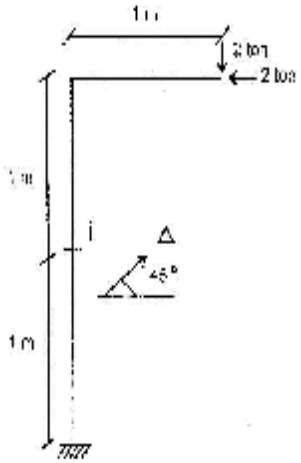
۳۰- در سازه مطابق شکل به ازای ... انرژی داخلی سازه مینیمم است.



۱) $x = \frac{pl}{4}$ ۲) $x = \frac{pl}{12}$

۳) $x = \frac{pl}{8}$ ۴) $x = 0$

۳۱- اگر سختی مقاطع اعضا سازه مطابق شکل زیر برابر EI, GA, EA باشد. آنگاه تغییر مکان مقطع I در امتداد محور Δ برابر کدام است؟ (۷۸)



۱) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{3EI}\right)$ ۲) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{2EI}\right)$

۳) $-\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{2EI}\right)$ ۴) $-\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{3EI}\right)$

۳۲- انرژی داخلی U و انرژی داخلی مکمل U^* زمانی برابرند که منحنی تنش – کرنش :

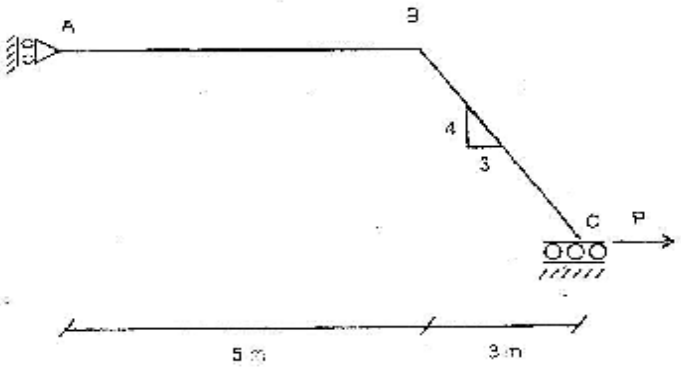
۱) خطی باشد ۲) غیر خطی باشد

۳) خطی بوده شیب ۴۵° داشته باشد ۴) هیچکدام

saze118.com

SAZE118.COM

۳۳- در قاب زیر تغییر مکان افقی Δ در تکیه گاه لغزنده گیردار C چقدر است؟ (صلبیت خمشی هر دو عضو برابر EI است و از تغییر طول عضوها صرف نظر می شود)



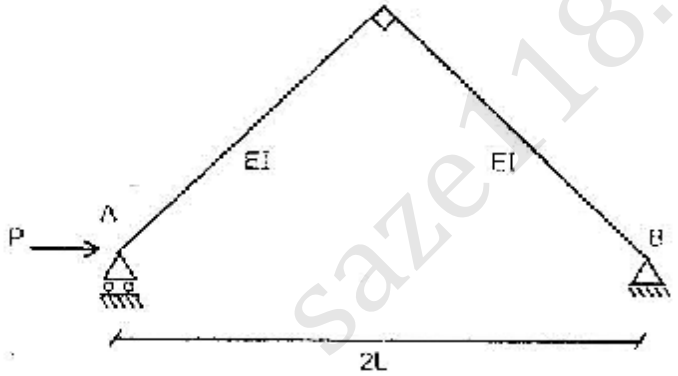
1) $\Delta = \frac{20P}{3EI}$

2) $\Delta = \frac{40P}{3EI}$

3) $\Delta = \frac{80P}{3EI}$

4) سازه ناپایدار است و Δ قابل محاسبه نیست.

۳۴- میزان نزدیک شدن تکیه گاه B,A سازه روبرو چقدر است؟



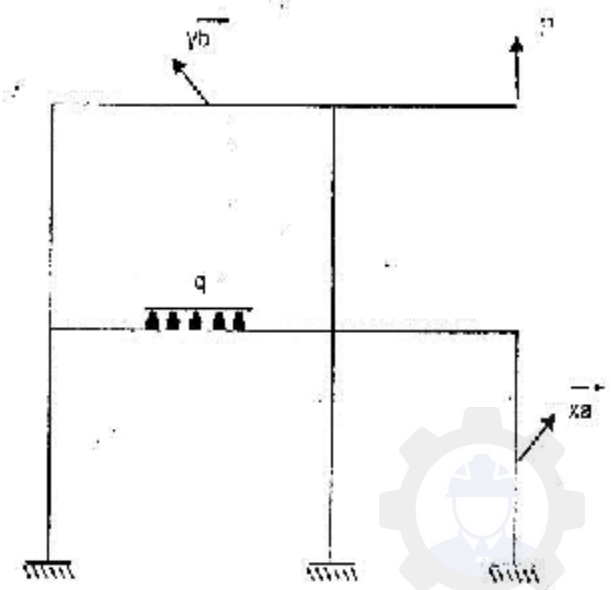
1) $\frac{PL^3}{3EI}$

2) $\frac{2PL^3}{3EI}$

3) $\frac{\sqrt{2}PL^3}{3EI}$

4) $\frac{2\sqrt{2}PL^3}{3EI}$

۳۵- سازه زیر مطابق شکل بارگذاری شده است. اگر $\vec{a},\vec{b}$ دو بردار ثابت باشند. آنگاه تابع انرژی داخلی سازه زیر بر حسب y,x (۷۷)



1) بیضوی

2) خطی است

3) سهموی است

4) هذلولی گون است

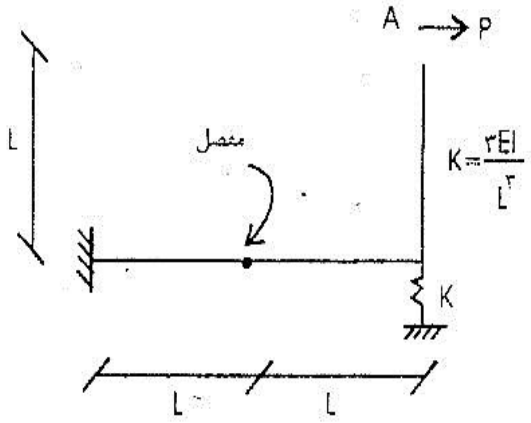
saze118.com

SAZE118.COM

سنجش دانش

۳۶- جابجایی افقی انتهای آزاد A تحت اثر بار متمرکز P چقدر است؟ (۸۴)

(EI برای کلیه اعضا ثابت و یکسان است)



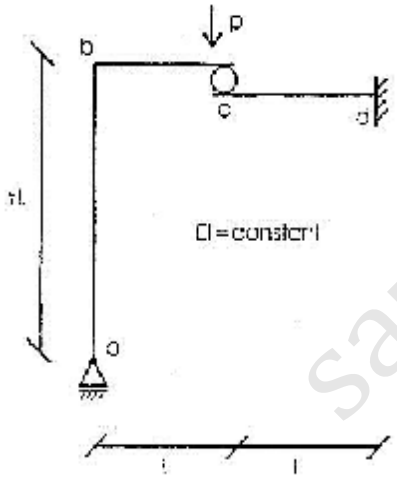
1) $\frac{PL^3}{EI}$

2) $\frac{2PL^3}{3EI}$

3) $\frac{4PL^3}{3EI}$

4) $\frac{5PL^3}{3EI}$

۳۷- در سازه شکل مقابل، تغییر مکان گره b کدام است؟



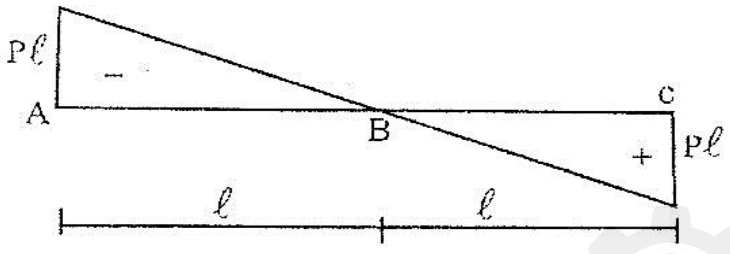
1) 0

2) $\frac{PL^3}{3EI}$

3) $\frac{PL^3}{6EI}$

4) $\frac{2PL^3}{3EI}$

۳۸- قطعه پیوسته ABC از سازه ای مفروض است. لنگر خمشی مثبت پایین و لنگر خمشی منفی بالای تیر رسم شده است فاصله (تغییر مکان) نقطه C نسبت به مماس بر نقطه A چقدر است؟ صلبیت خمشی BC,AB به ترتیب برابر ۲EI و EI می باشد.



1) $-\frac{PL^3}{4EI}$

2) $-\frac{PL^3}{6EI}$

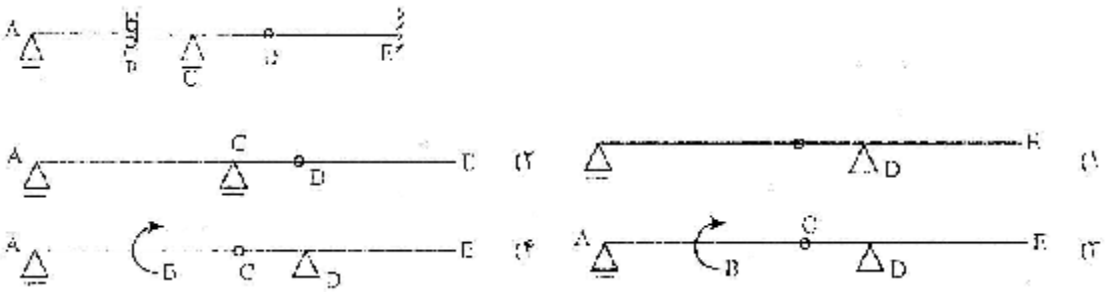
3) $-\frac{PL^3}{2EI}$

4) $-\frac{PL^3}{12EI}$

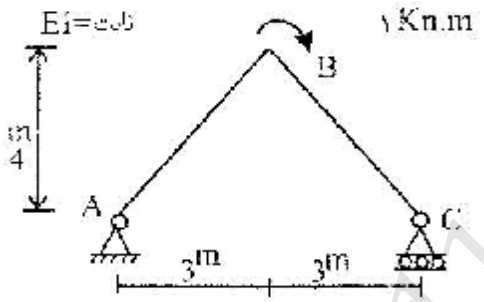
saze118.com

SAZE118.COM

۳۹- تیر مزدوج تیر شکل زیر مطابق کدام یک از اشکال داده شده می باشد؟



۴۰- در سیستم داده شده q_B را حساب کنید.



1) $\frac{0/42}{EI}$

2) $\frac{0/83}{EI}$

3) $\frac{1}{EI}$

4) $\frac{1/20}{EI}$

saze118.com

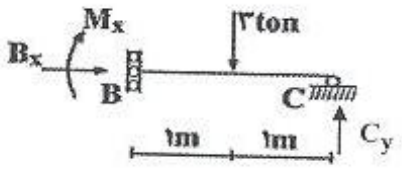
SAZE118.COM

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

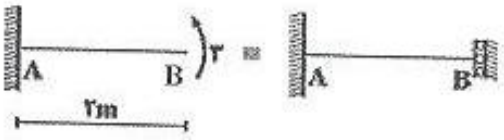
۱- گزینه «۲»

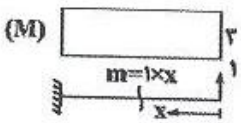
ابتدا قطعه BC را جدا می‌کنیم و آن‌را تحلیل می‌کنیم.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - 3 = 0 \Rightarrow C_y = 3\text{ton}$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 3(2) - 3(1) - M_B = 0 \Rightarrow M_B = 3\text{t.m}$$



سپس از روش کار مجازی، تغییر مکان قطعه AB را به‌دست می‌آوریم:

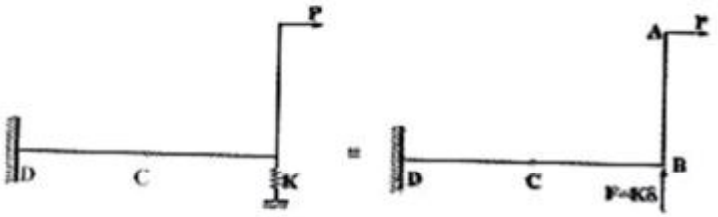


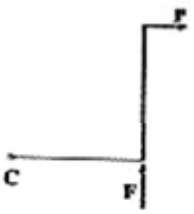


$$1\times\Delta = \int_0^2 \frac{mMdx}{EI} = \int_0^2 \frac{x(3)dx}{EI} = \frac{3}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{6}{EI} = \frac{6}{1000}\text{m} = 6\text{mm}$$

۲- گزینه «۳»

از روش کار حقیقی استفاده می‌کنیم.





$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F(L) - P(L) = 0 \Rightarrow F = P$$

SAZE118.COM

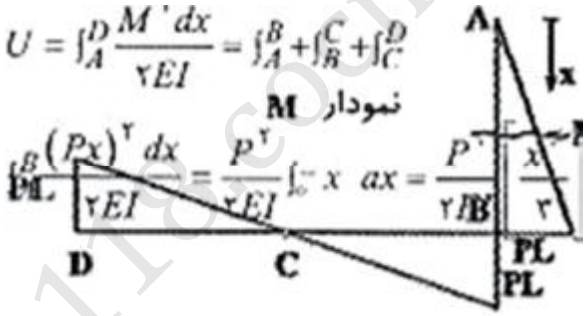
کار خارجی انجام شده توسط نیروی تدریجی P برابر است با:

$$W=\frac{1}{2}P.\delta_A$$

با استفاده از رابطه 3-3، انرژی داخلی ناشی از خمش را محاسبه می‌کنیم.

$$U=\int_A^D\frac{M^2dx}{2EI}=\int_A^B+\int_B^C+\int_C^D$$

$$\int_A^B\frac{(Px)^2dx}{2EI}=\frac{P^2}{2EI}\int_0^{-}x\ ax=\frac{P^2}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{?}=\frac{P^2L^3}{6EI}$$



به دلیل تشابه، انرژی داخلی قطعات BC و CD نیز برابر $\frac{P^2L^3}{6EI}$ می‌باشد.

انرژی داخلی فنر از رابطه (3-6) به‌دست می‌آید.

$$U=\frac{P^2}{2K}=\frac{P^2}{2\left(\frac{3EI}{L^3}\right)}=\frac{P^2L^3}{6EI}$$

از تساوی کار خارجی با انرژی داخلی خواهیم داشت:

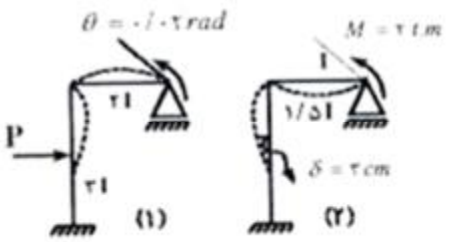
$$W=U_{\text{خمش}}+U_{\text{فنر}}$$

$$\frac{1}{2}P.\delta_A=3\left(\frac{P^2L^3}{6EI}\right)+\frac{P^2L^3}{6Ei}=\frac{4P^2L^3}{6EI}\Rightarrow\delta_A\frac{4PL^3}{3EI}$$

۳- گزینه «۴»

از آنجا که سختی سازه‌ها یکسان نیست، ابتدا سختی آن‌ها را یکسان می‌کنیم. برای این منظور، سختی سازه شماره 2 را 2 برابر می‌کنیم، در نتیجه δ نصف می‌شود.

saze118.com



با استفاده از قانونی بتی – ماکسول و با توجه نکته 10، می‌توان رابطه 3-19 را به‌صورت زیر نوشت:

$$P\delta = M\phi \Rightarrow P\left(1/5\times10^{-2}\right) = 2(0/02) \Rightarrow P = \frac{0/04}{0/015} = \frac{8}{3}\,\text{ton}$$

۴- گزینه «۱»

از آنجا که اعضای BC و CD نیروی محوری ندارند، گره C هیچ‌گونه حرکتی نخواهد داشت و در نتیجه هیچ نیرویی به عضو AC منتقل نخواهد شد.

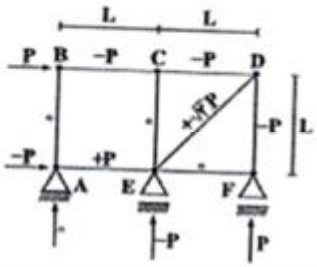
۵- گزینه «۳»

از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. ابتدا سازه را تحت بارگذاری موجود تحلیل می‌کنیم. روش تحلیل گره به گره می‌باشد. (از گره B شروع می‌کنیم و سپس به ترتیب گره‌های C، D، F، AE را تحلیل می‌کنیم.)

نیروی هر عضو (N) را برروی همان عضو می‌نویسیم.

سپس بار واحدی را در جهت افقی به گره B وارد می‌کنیم و بار هر عضو (n) را برروی عضو درج می‌کنیم.

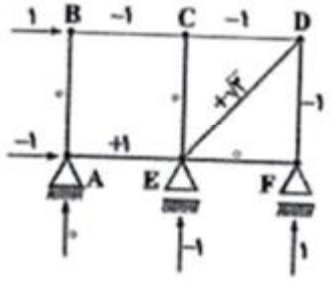
با استفاده از رابطه 3-16 داریم:



$$1\times\Delta = \frac{(-1)(-P)L}{AE} + \frac{(-1)(-P)L}{AE} + \frac{(-1)(-P)L}{AE} + \frac{(1)(P)L}{AE} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}P\right)\left(\sqrt{2}L\right)}{AE}$$

$$= \frac{4PL}{AE} + \frac{2\sqrt{2}PL}{AE} = \frac{2PL}{AE}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

SAZE118.COM



۶- گزینه «۳»

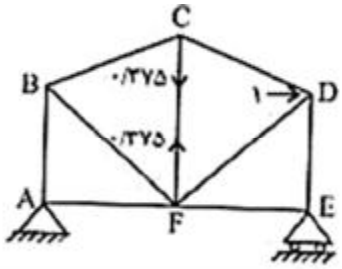
روش اول: از قانون بتی – ماکسول داریم:

$$P_1\delta_1 = P_2\delta_2$$
$$2/625\times 2 = 7\delta_2 \Rightarrow \delta_2 = 0/75$$

روش دوم: از روش کار مجازی مسئله را حل می‌کنیم.

از آنجا که هیچ‌گونه بارگذاری موجود ندارد، N کلیه اعضاء برابر صفر خواهد بود. بنابراین طرف راست معادله 16-3 برابر صفر خواهد بود. با توجه به راهنمایی مسئله، در صورتی‌که بار واحدی را در نقطه D وارد کنیم، نیروی عضو CF برابر $0/375 = (\frac{2/625}{7})$ خواهد بود. لذا با توجه به نکته 5 داریم:

$$1\times\Delta + \sum n_i\delta_i = 0$$
$$1\times\Delta + 2cm\times(-0/375) = 0$$
$$\Delta = 0/75$$

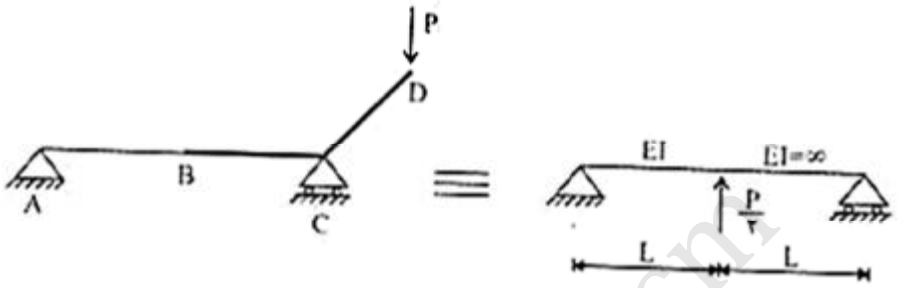


(به دلیل آن‌که نیروی عضو CF فشاری است، علامت آن منفی بوده و در نتیجه Δ جهت با بار واحد، یعنی از چپ به راست می‌باشد)

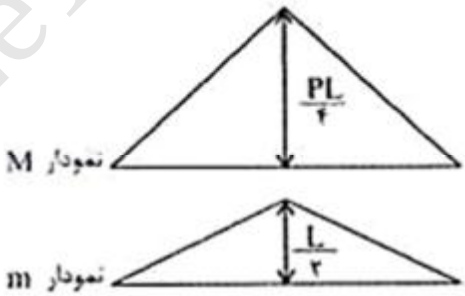
SAZE118.COM

۷- گزینه «۱»

با توجه به صلب بودن قطعه BCD، با استفاده از تعادل لنگر ملاحظه می‌شود که می‌توان به‌جای نیروی P در D، نیروی $\frac{P}{2}$ را در B جایگزین نمود. با استفاده از روش کار مجازی سازه را تحلیل می‌کنیم.



بار واحدی را در نقطه B وارد کرده و نمودار لنگر آن را رسم می‌کنیم. (به‌دلیل آن که جهت P از پایین به بالاست، بار واحد را نیز هم جهت با P در نظر می‌گیریم.)



$$1\times\Delta=\int_0^{2L}\frac{Mmdx}{EI}=\int_0^{L}+\int_L^{2L}$$

$$=\int_0^{L}\frac{Mmdx}{EI}=[2\frac{PL}{4}\times\frac{L}{2}+0\times0)+(\frac{PL}{4}\times0+\frac{L}{2}\times0)]\frac{L}{6EI}=\frac{PL^3}{24EI}$$

به دلیل آن که در قسمت BC، EI بی‌نهایت می‌باشد، $\int_L^{2L}\frac{Mmdx}{\infty}0$ خواهد بود. لذا داریم:

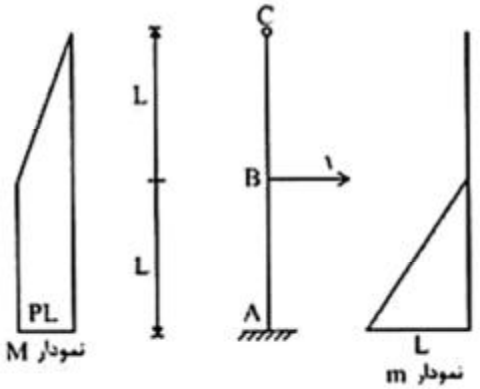
$$1\times\Delta=\frac{PL^3}{24EI}+0=\frac{PL^3}{24EI}$$

۸- گزینه «۲»

بار واحدی را در گره B وارد می‌کنیم و نمودار لنگر تیر AC را رسم می‌کنیم. از روش کار مجازی داریم:

SAZE118.COM

$$1\times\Delta=\int_0^{2L}\frac{Mmdx}{EI}$$



از آنجا که مقدار m در قسمت BC برابر صفر است، تنها انتگرال را برای قسمت AB محاسبه می‌کنیم.

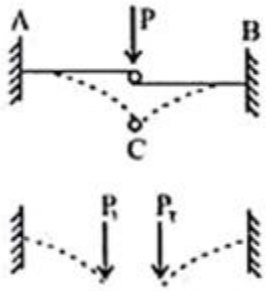
$$\int_0^{L}\frac{Mmdx}{EI}=[2(L\times PL+PL\times 0)+(L\times PL+PL\times 0)]\frac{1}{6EI}=\frac{PL^3}{2EI}$$

۹- گزینه «۳»

با توجه به سازگای تغییر مکان‌ها، ملاحظه می‌شود که سهم بار هر دو تیر، برابر است.

$$\Delta_{AC}=\Delta_{BC}\Rightarrow P_1=P_2=\frac{P}{2}$$

$$M_A=\frac{P}{2}(L)=\frac{PL}{2}$$



۱۰- گزینه «۴»

با استفاده از رابطه بتی – ماکسول داریم:

(جهت تغییر مکان‌ها، مخالف جهت نیروها است)

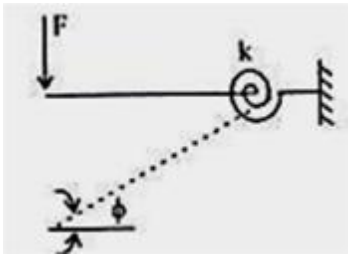
$$P\times(-0/1)=Q\times(-0/3)$$

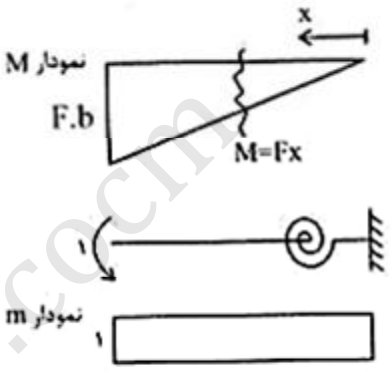
$$P=3Q$$

۱۱- گزینه «۱»

SAZE118.COM

از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. ابتدا نمودار لنگر خشمی ناشی از F را رسم می‌کنیم. سپس لنگر واحـدی را در نقطه A وارد می‌کنیم و نمودار لنگر خمشی ناشی از آن را نیز رسم می‌کنیم. دوران در A عبارت است از دوران ناشی از بار خارجی به علاوه دوران ناشی از فنر که مقدار آن برابر است با:





$$1\times\phi_1=\int\frac{mMdx}{EI}=\int_0^b\frac{1(Fx)dx}{EI}=\frac{F}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b=\frac{Fb^2}{2EI}$$

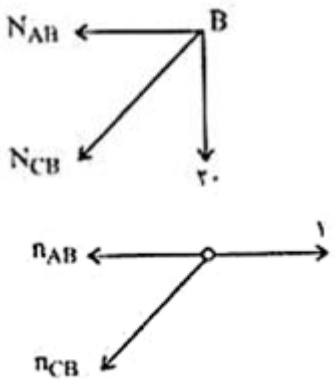
$$=\frac{\frac{Fb}{8EI}}{b}=\frac{Fb^2}{8EI}\quad \phi_{\text{فنر}}=\frac{M}{K}$$

$$\phi_A=\phi_1+\phi_{\text{فنر}}=\frac{Fb^2}{2EI}+\frac{Fb^2}{8EI}=\frac{5Fb^2}{8EI}$$

۱۲- گزینه «۲»

از روش کار مجازی، سازه را تحلیل می‌کنیم.

$$\sum F_y=0\Rightarrow N_{CB}=-20\sqrt{2}$$
$$\sum F_x=0\Rightarrow N_{AB}=20$$
$$\sum F_y=0\Rightarrow n_{CB}=0$$
$$\sum F_x=0\Rightarrow n_{AB}=1$$
$$1\times\Delta=\sum\frac{n_iN_iL}{A_ie}=\frac{1\times20\times4}{25\times10^{-4}E}+\frac{0\times20\sqrt{2}\times4\sqrt{2}}{25\times10^{-4}E}=\frac{32000}{E}$$

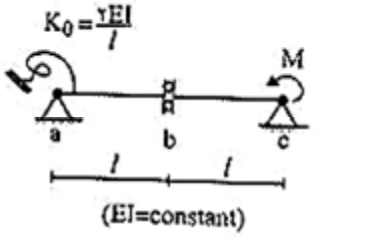


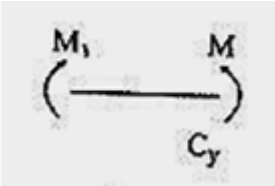
۱۳- گزینه «۳»

با توجه به جدول 1-3 ملاحظه می‌شود که گزینه «3» پاسخ صحیح است.

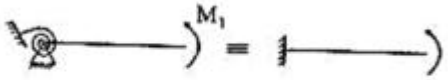
۱۴- گزینه «۲»

SAZE118.COM

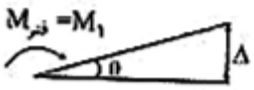




$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_1 = M$$



$$M_1 = M \Rightarrow \Delta_1 \frac{ML^2}{2EI}$$



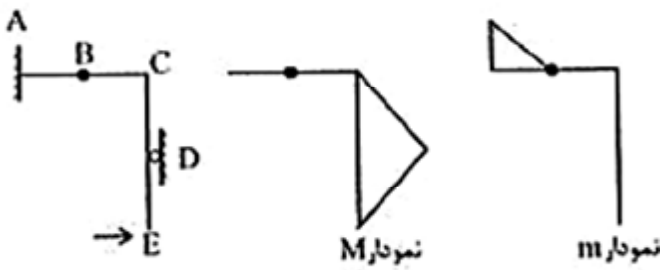
$$M_{فنر} = K\theta \Rightarrow \theta = \frac{M}{\frac{2EI}{L}} = \frac{ML}{2EI}$$

$$\Delta_2 = \theta L = \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\Delta_{فنر} = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{ML^2}{2EI} + \frac{ML^2}{2EI} = \frac{ML^2}{EI}$$

۱۵- گزینه «۱»

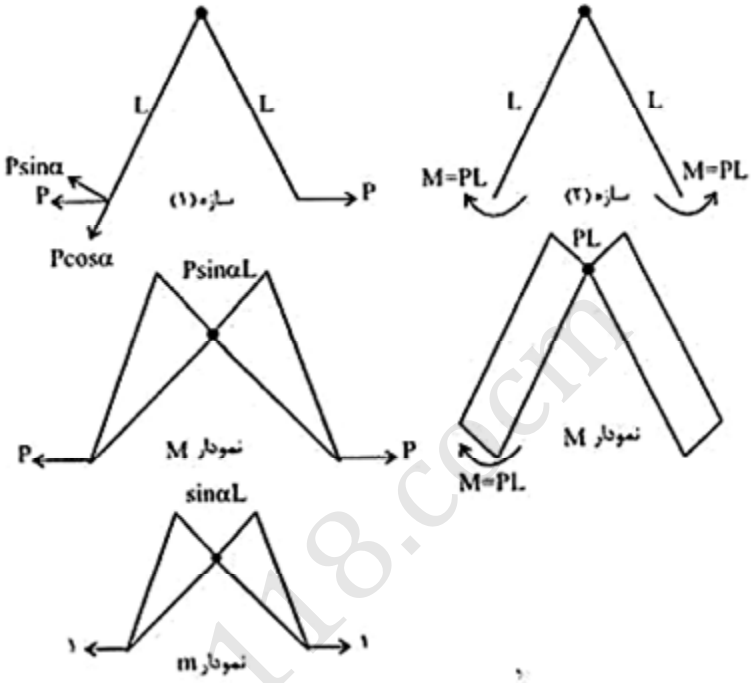
ابتدا نمودار لنگر خمشی را برای بارگذاری داده شده رسم می‌کنیم. سپس نیروی واحدی را در گره B و در جهت عمودی وارد کرده و نمودار لنگر خمشی آن را نیز ترسیم می‌کنیم. با استفاده از روش کار مجازی، واضح است که حاصل‌ضرب نمودار لنگر کلیه اعضای به دلیل صفر بودن یکی از آن‌ها برابر صفر است. لذا گزینه «1» پاسخ صحیح است.



۱۶- گزینه «۲»

SAZE118.COM

مجدداً با استفاده از روش کار مجازی مسئله را حل می‌کنیم. ابتدا نمودار لنگر نیروهای موجود را رسم کرده و سپس با وارد کردن بار واحدی، نمودار لنگر آن را نیز ترسیم می‌کنیم.



با استفاده از رابطه 3-10 داریم:

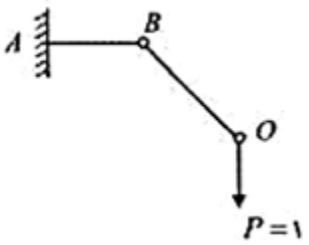
$$\Delta_1 = 2(0+PL^2\sin^2\alpha)\frac{L}{6EI} = \frac{P\sin^2\alpha L^3}{3EI}$$

$$\Delta_2 = [2(0+PL^2\sin\alpha)+(P^2L^2\sin\alpha+0)]\frac{L}{6EI} = \frac{P^2L^3\sin\alpha}{2EI} \Rightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2}{3}\sin\alpha$$

۱۷- گزینه «۳»

۱۸- گزینه «۴»

$$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}+\frac{ML^2}{2EI} = \frac{1\times(2)^3}{3EI}+\frac{(1\times2)(2)^2}{2EI} = \frac{20}{3EI}$$



۱۹- گزینه «۲»

SAZE118.COM

$$\Delta_C = \frac{pL^3}{48EI} - \frac{F_sL^3}{48EI} = \frac{F_s}{K_s} = \frac{F_sL^3}{48EI} \Rightarrow P - F_s = F_s \Rightarrow F_s = \frac{P}{2}$$

۲۰- گزینه «۲»

$$\frac{\frac{wL}{2}\times L^3}{3EI} - \frac{\frac{F}{2}\times L^3}{3EI} = \frac{F}{k_s}$$

$$\frac{wL^4}{6EI} - \frac{FL^3}{6EI} = \frac{FL^3}{2EI}$$

$$\frac{4}{3}FL^3 = \frac{wL^4}{3} \Rightarrow F = \frac{wL}{4}$$

۲۱- گزینه «۳»

با روش بار واحد مجازی خواهیم داشت:

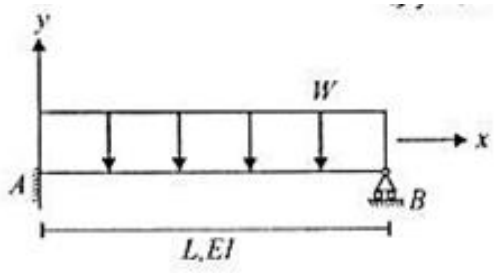
$$(\Delta_H)_c = \frac{L}{EA}(3F_4 - F_6)$$

۲۲- گزینه «۳»

طبق تعادل: $R_B = \frac{3}{8}wL$

$$M = \frac{3}{8}wLx - \frac{wx^2}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow y = \frac{w}{24EI}(6L^2x^2 - x^4 - 5L^4)$$



23- گزینه (2) صحیح است.

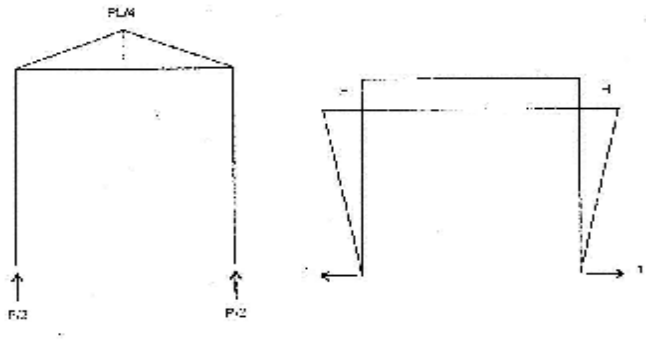
گزینه 1 و 3 به دلیل اینکه ممان در گوشه ها صفر نیست اشتباه می باشند (زیرا در C,A جابجایی برابر صفر می باشد) و گزینه 4 هم به دلیل اینکه در وسط ممان صفر نیست اشتباه می باشد (زیرا جابجایی در B برابر صفر می باشد) با توجه به توضیحات داده شده در درس گزینه 2 درست است.

saze118.com

SAZE118.COM

سنجش دانش

24- گزینه (1) صحیح است.



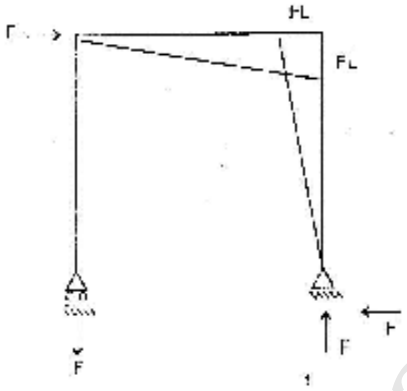
مساله را از روش بار واحد حل می کنیم:

$$\Delta = 2\times\frac{L/2}{6EI}\left[3\times\frac{PL}{4}\times H\right]$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{PL^2H}{8EI}$$

25- گزینه (2) صحیح است.

مساله از روش تغییر مکانهای سازگار حل می شود. R_X^A را حذف می کنیم . نمودار ممان برای قاب جدید و قاب بار واحد را کشیده و Δ', Δ را حساب می کنیم.

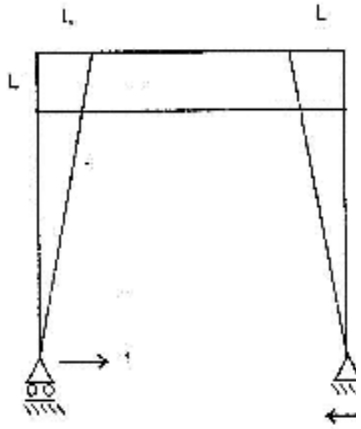


$$\Delta = \frac{L}{6EI}[3\times FL\times L]+\frac{L}{6\times 2EI}[2\times FL\times L]$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{2FL^3}{3EI}$$

$$\Delta']\frac{L}{6EI}[2\times L\times L] = \frac{L}{EI}[L\times L] = \frac{L}{6\times 2EI}[2L^2]$$

$$\Rightarrow \Delta' = \frac{3L^3}{2EI}$$



$$-\frac{\Delta}{\Delta'} = -\frac{\frac{2FL^3}{3EI}}{\frac{3L^3}{2EI}} = -\frac{4}{9}F$$

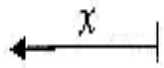
26- گزینه (2) صحیح است

راحت ترین راه این است که ممان خمشی را در تیر cd، از سمت راست به چپ تبدیل کرده و با دو بار انتگرال گرفتن به

SAZE118.COM

جواب برسیم.

$$\left.\begin{aligned} M_C &= M(2L) = -7\times 2L + 14L = \mathbf{0} \\ M_D &= M(3L) = -7\times 3L + 14L = -7L \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_{CD} = -7L + 7x$$



$$\Rightarrow M_{CD} = -7L + 7x \Rightarrow EIq_{CD}$$

$$= -7Lx + \frac{7}{2}x^2 + q_\circ$$

$$q_D = q_\circ = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow EIy_{CD} = -\frac{7}{2}Lx^2 + \frac{7}{6}x^3 + y_\circ$$

$$y_D = y_\circ = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow ELy_{CD} = -\frac{7}{2}Lx^2 + \frac{7}{6}x^3 \Rightarrow y_C = y(L) = -\frac{7}{3}\frac{L^3}{EI}$$

$$\Rightarrow y_C = -2/1cm$$

27- گزینه (2) صحیح است.

چون انرژی ذخیره شده مینیم است بنابراین خواهیم داشت: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = \mathbf{0}$

و برای اینکه هیچ تغییر شکلی نداشته باشیم به دلیل تقارن y=40 خواهد بود و x هم چون تغییر طول محوری نداریم $x = \mathbf{0}$ خواهد بود، از لنگر گیرداری در فصل 4 نیز خواهیم یافت که که $Z = 400$ خواهد شد.

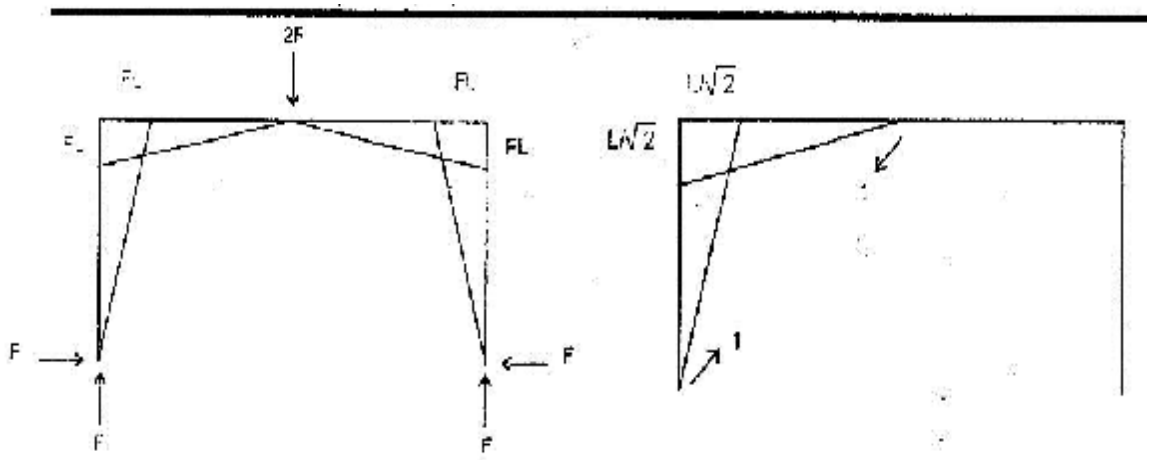
28- گزینه (1) صحیح است.

به دلیل تقارن خواهیم داشت: $R_{Ay} = R_{Dy} = F1$ و از ممان گرفتن حول G هم مولفه های افقی عکس العمل ها به دست می آید.

از روش بار واحد استفاده می کنیم . همانطور که در فصل دوم گفته شد، دو نیرو واحد و به سمت یکدیگر در راستای AG قرار می دهیم.

saze118.com

saze118.com

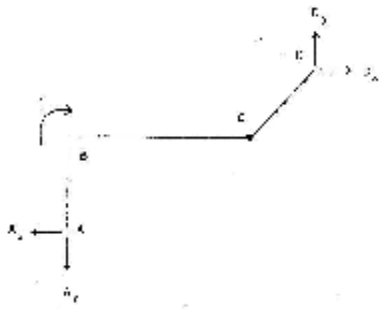


$$\Delta = 2\times\frac{L}{6EI}\left[2\times EL\times\frac{L}{\sqrt{2}}\right]$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{\sqrt{2}FL^3}{3EI}$$

توجه: از علامت منفی ، $F1$,$\frac{L}{\sqrt{2}}$ به دلیل اینکه هر دو هم علامت هستند صرف نظر شده است ولی به هم علامت بـودن یا مختلف العلامه بودن و ممان توجه کنید.

29- گزینه (4) صحیح است.

ممان واحد را در B قرار می دهیم و عکس العمل تکیه گاه ها را بدست می آوریم



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow D_x = D_y$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1 = D_y\times 3l - D_x\times 2L$$
$$\Rightarrow D_x = D_y = \frac{1}{L}$$
$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \Rightarrow A_x = A_y = \frac{1}{L}$$
$$1\times q = -\frac{L}{1000}A_y + \frac{L}{500}\times D_x = 0 \Rightarrow q = -\frac{1}{1000}$$

30- گزینه (3) صحیح است.

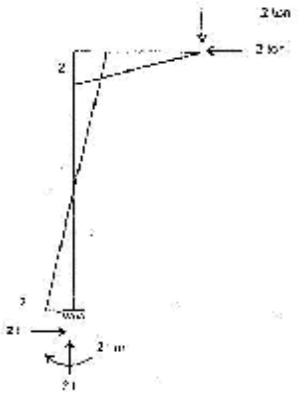
همانطور که گفته شد باید $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ شود که بنابراین تغییر زاویه ای در تکیه گاهی نخواهیم داشت بنابراین باید برابر بـا لنگر گیرداری سازه شود.

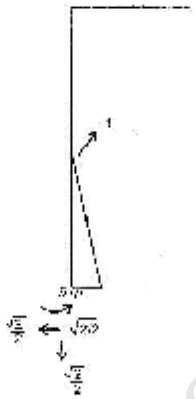
SAZE118.COM

$\Rightarrow x = \frac{PL}{8}$ (لنگر گیرداری در فصل 4 توضیح داده خواهد شد)

31- گزینه (4) صحیح است.

بار واحدی در راستای Δ بر سازه وارد کرده و جابجایی را در این راستا حساب می کنیم.





ناشی از خمشی $\Delta = \frac{1}{6EI}\left[2\times 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

ناشی از برش $+\int_0^1 \frac{(-2)\times \sqrt{2}/2}{GA}dx$

ناشی از نیروی محوری $+\int_0^1 \frac{(-2)\times \sqrt{2}/2}{EA}dx$

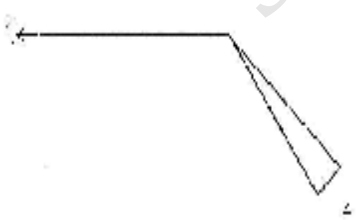
$\Rightarrow \Delta = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA}+\frac{1}{3EI}\right)$

32- گزینه (1) صحیح است.

با توجه به توضیحات گفته شده در درس، فقط مواد خطی دارای این ویژگی هستند.

33- گزینه (3) صحیح است.

نمودار ممان را برای همین بار گذاری و بار واحد به جای بار P رسم می کنیم:



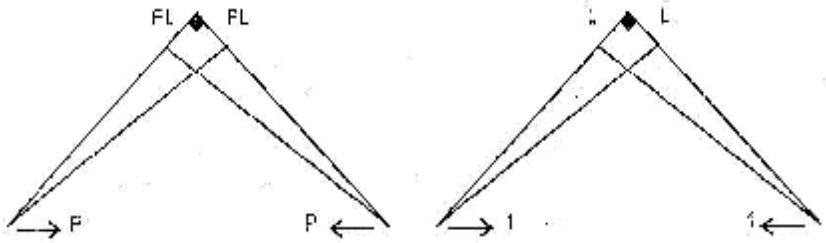
$\Delta = \frac{5}{6EI}[2\times 4P\times 4]$

$\Rightarrow \Delta = \frac{80P}{3EI}$

34- گزینه (4) صحیح است.

نمودار ممان را برای بارگذاری اصلی بار واحد رسم می کنیم.

SAZE118.COM



$$\Delta = 2\times\frac{\sqrt{2}L}{6EI}[2\times PL\times L]$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{2\sqrt{2}PL^3}{3EI}$$

35- گزینه (3) صحیح است.

انرژی ذخیره شده در سازه تابعی درجه 2 نسبت به نیروی وارد به سازه می باشد. به عنوان مثال انرژی ذخیره شده در میله تحت کشش مقابل برابر است با .

$$W = \frac{1}{2}\frac{P^2L}{EA}$$

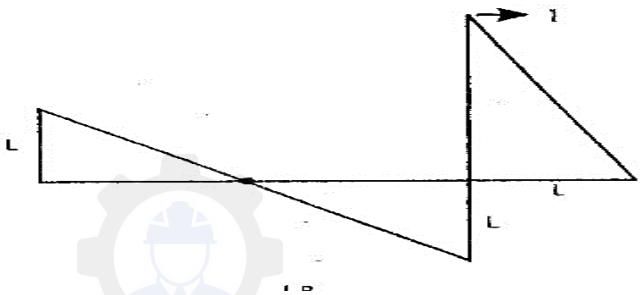
36- گزینه (3) صحیح است.

از آنجایی که بار P و جابجایی مورد نظر هم جهت می باشند، نمودار همان سازه با بارواقعی و سازه با بار واحد مانند هم خواهد بود. بنابراین بهتر است این مساله از روش بار واحد حل شود.

$$1\times\Delta - \times\frac{P}{K} = 3\times\frac{L}{6EI}[2\times PL\times L]$$

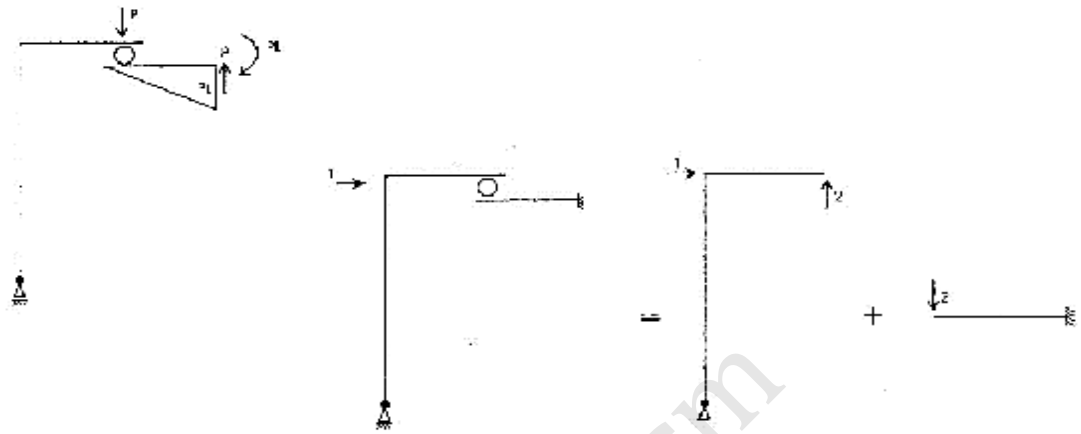
توجه کنید که تاثیر جابجایی فنر همانند نشست تکیه گاهی می باشد.

$$\Rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{EI} + \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow \Delta = \frac{4PL^3}{3EI}$$

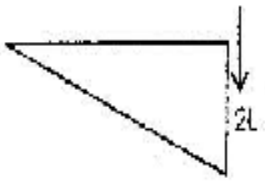


SAZE118.COM

37- گزینه (4) صحیح است مساله از روش با واحد به سادگی قابل حل است.

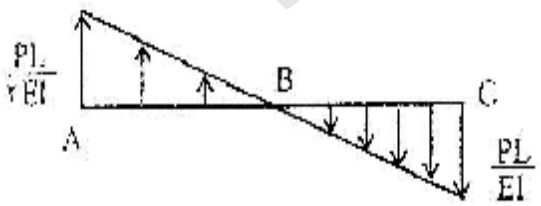


نمودار ممان سازه بار واحد فقط در محدوده cd مورد نیاز است چرا که نمودار ممان سازه اصلی در جاهای دیگر صفر است.



نمودار ممان سازه با بار واحد $\Delta = \frac{L}{3EI}[2\times PL\times 2L] = \frac{2PL^3}{3EI}$

38- گزینه (4) صحیح است. ابتدا نمودار بار الاستیک $\left(\frac{M}{EI}\right)$ را رسم می کنیم فاصله نقطه C نسبت به مماس رسم شده بر نقطه A برابر ممان بار الاستیک نسبت به نقطه C می باشد.



$$d_{C/A} = -\frac{1}{2}\frac{PL}{2EI}\times L\times(L+\frac{2}{3}L)+\frac{1}{2}\frac{PL}{EI}\times L\times\left(\frac{L}{3}\right)$$

$$\Rightarrow d_{C/A} = -\frac{PL^3}{12EI}$$

به این که جهت نمودار ممان بر عکس کشیده شده دقت کنید.

39- گزینه (3 یا 4) صحیح است. توجه کنید که در B به دلیل وجود اختلاف جابجایی باید در تیر مزدوج ممان متمرکز موجود باشد.

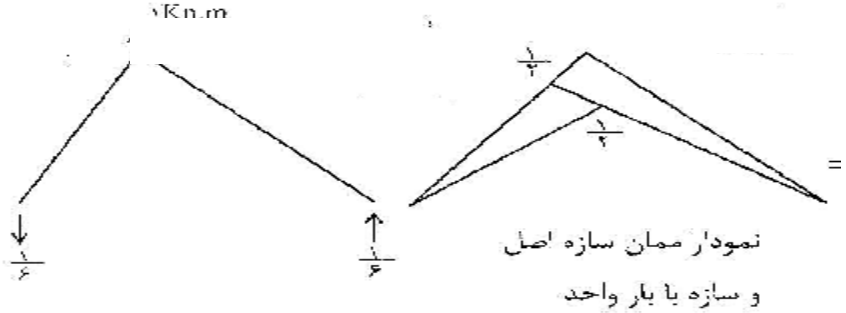
saze118.com

saze118.com

40- گزینه (2) صحیح است. بهترین راه حل استفاده از بار واحد است.

$$\Rightarrow q = \frac{2\times 5}{6EI}\left[2\times\frac{1^2}{2}\right]$$

$$\Rightarrow q = \frac{0/83}{EI}$$



saze118.cocm

SAZE118.COM

فصل چهارم – تحلیل سازه‌های نامعین

تاکنون روش‌های متعددی برای تحلیل سازه‌های نامعین ارائه شده است. متداول‌ترین روش‌های تحلیل سازه‌های نـامعین عبارتند از: روش نرمی (روش سازگاری تغییر شکل‌ها و قضیه اول کاستلیانو) و روش سختی (روش سیب – افـت، پخـش لنگر و قضیه دوم کاستلیانو)

4-1 روش سازگاری تغییر شکل‌ها (روش نیرو)

این روش یکی از بهترین و کاربردی‌ترین روش‌های تحلیل سازه‌های نامعین می‌باشد. ایـن روش بـرای سـازه‌هـایی قابـل استفاده است که بارگذاری آن‌ها در محدوده ارتجاعی باشد (منحنی تنش – کرنش آن‌ها خطی باشد.)

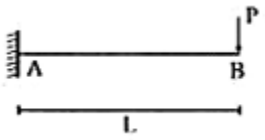
در این روش می‌توان، سازه نامعین را با حذف قیود اضافی (نیروهای زائد = عناصر نیرویی که مازاد بر حـداقل تعـداد لازم برای تعادل ایستایی سازه می‌باشند) به یک سازه معین و پایدار تبدیل نمود. سازه معین و پایداری کـه پـس از برداشـتن قیود اضافی به‌دست می‌آید، «سازه اولیه» نام دارد. در این‌صورت می‌توان سازه معـادل را کـه همـان سـازه اولیـه، تحـت بارگذاری اصلی و نیروهای زائد مجهول است، تحلیل نمود. برای تحلیل این سازه معادل، از اصل سازگاری تغییر شکل‌هـا و اصل جمع آثار استفاده می‌شود. در این مسائل باید به تعداد قیود اضافی، معادله سازگاری تغییر شکل نوشته شود.

پیشنهاد می‌شود برای تحلیل سریع‌تر سازه‌های معین، روابط جدول 4-1 به خاطر سپرده شوند.

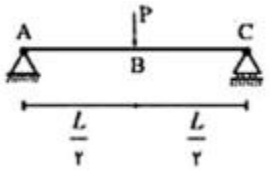
(k^{v} معرف سختی خمشی و k^{θ} معرف سختی دورانی است.)

SAZE118.COM

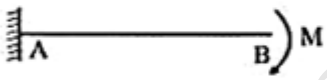
جدول 4-1 روابط جابه‌جایی و شیب تیرهای متداول



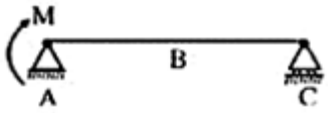
$$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$$
$$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$
$$k_B^v = \frac{3EI}{l^3}$$



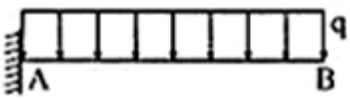
$$\Delta_B = \frac{PL^3}{48EI}$$
$$\theta_A = \theta_C = \frac{PL^2}{16EI}$$
$$k_{A,C}^{\theta} = \frac{16EI}{l^2}$$

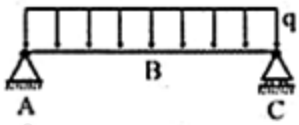


$$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$$
$$\theta_B = \frac{ML}{EI}$$
$$k_B^{\theta} = \frac{EI}{l}$$

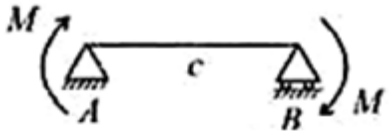
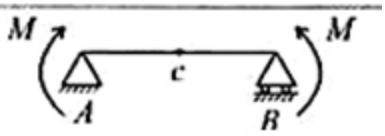


$$\Delta_B = \frac{ML^2}{16EI}$$
$$\theta_A = \frac{ML}{3EI}$$
$$\theta_C = \frac{ML}{6EI}$$
$$k_A^{\theta} = \frac{3EI}{l}$$





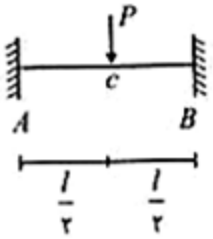
saze118.com

$\Delta_B = \frac{5qL^4}{384EI}$ $\theta_A = \theta_C = \frac{qL^3}{24EI}$	$\Delta_B = \frac{qL^4}{8EI}$ $\theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
 $\theta_A = \theta_B = \frac{ML}{6EI}$ $\Delta_C = 0$ $k^{\theta}_{A,B} = \frac{6EI}{L}$	 $\theta_A = -\theta_B = \frac{ML}{2EI}$ $\Delta_C = \frac{ML^2}{8EI}$ $k^{\theta}_{A,B} = \frac{2EI}{L}$

saze118.com

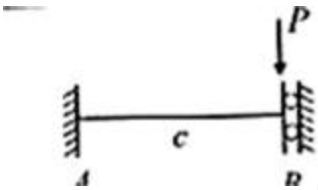
saze118.com

$$\theta_A = \frac{ML}{4EI}$$

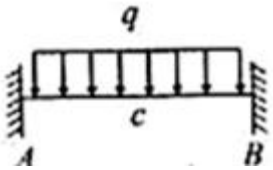


$$\Delta_C = \frac{PL^3}{192EI}$$

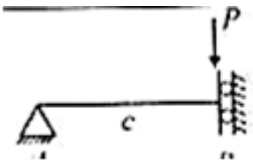
$$k_c^v = \frac{192EI}{l^3}$$



$$\Delta_C = \frac{PL^3}{12EI}$$

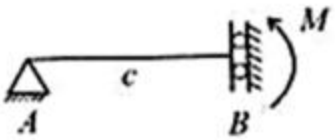


$$\Delta_C = \frac{ql^4}{384EI}$$



$$\Delta_B = \frac{PL^3}{2EI}$$

$$\theta_A = \frac{pl^2}{2EI}$$



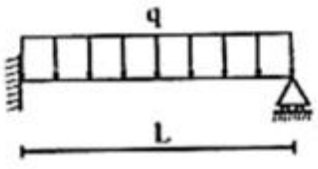
$$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$$

$$\theta_A = \frac{ML}{EI}$$

saze118.com

SAZE118.COM

مثال ۱: عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی کدام است؟

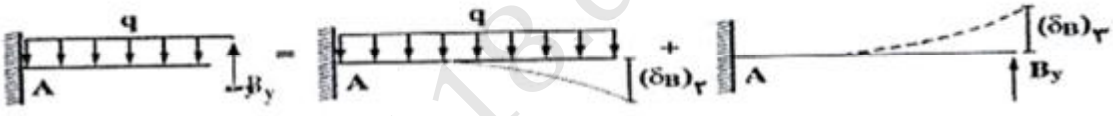


1) qL　　2) $\frac{3}{4}qL$

3) $\frac{1}{4}qL$　　4) $\frac{3}{8}qL$

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

از روش سازگاری تغییر شکل‌ها استفاده می‌کنیم. تکیه‌گاه غلتکی را حذف می‌کنیم و عکس‌العمل آن‌را بر سازه وارد می‌کنیم. براساس اصل جمع آثار می‌توان هر یک از نیروها را جداگانه به سازه وارد نمود و اثر آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد. بنابراین می‌توان سازه اولیه و سازه‌های معادل را به‌صورت زیر ترسیم کرد:



از جدول 4-1، ملاحظه می‌شود که $(\delta_B)_1=\frac{B_yL^3}{3EI},(\delta_B)_2=\frac{qL^4}{8EI}$ هستند. از طرفی به دیل آن‌که تکیه‌گاه B، حرکت عمودی ندارد، تغییر مکان کلی آن برابر صفر است. با در نظر گرفتن جهت بالا، به‌عنوان جهت مثبت و از اصل جمع آثار خواهیم داشت:

$$\Delta_B=\frac{B_yL^3}{3EI}-\frac{qL^4}{8EI}=0$$

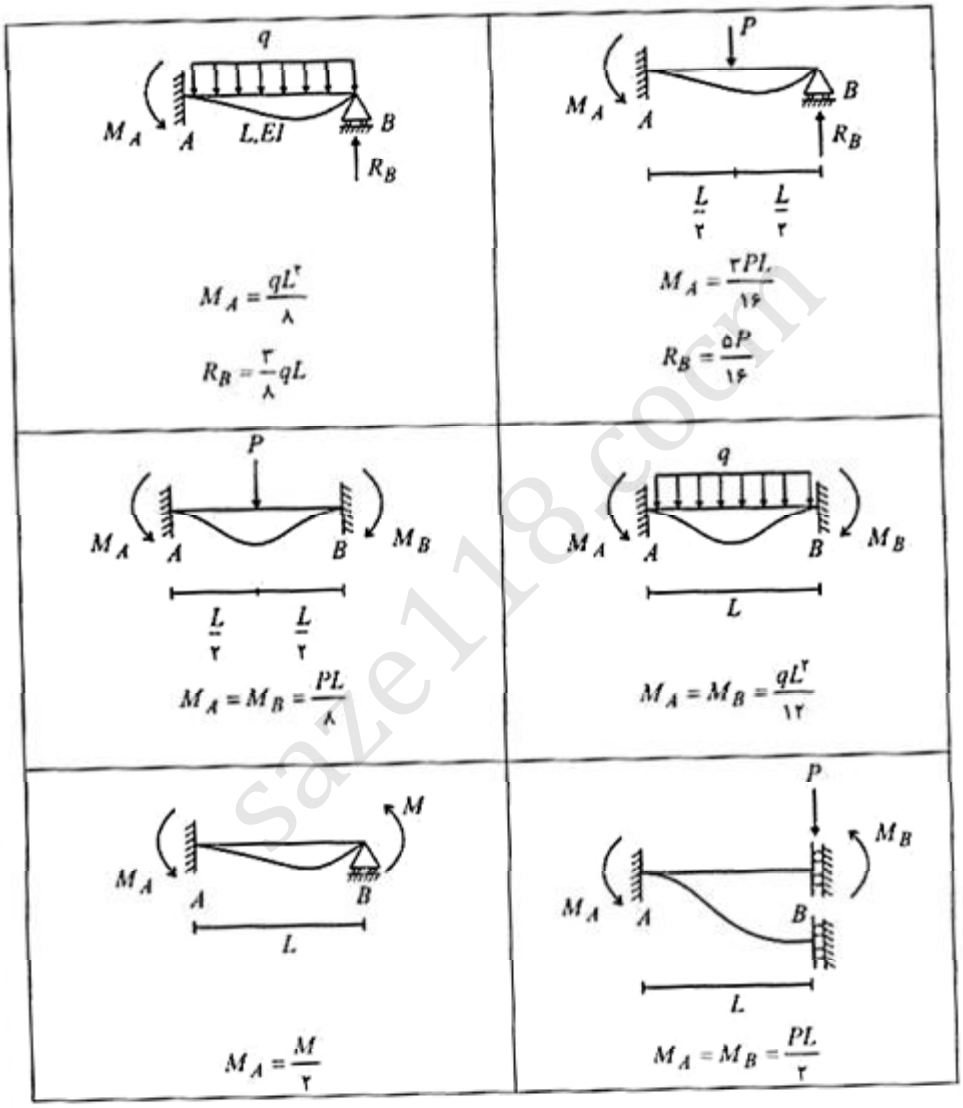
$$\Rightarrow B_y=\frac{3}{8}qL$$

پس با استفاده از روش سازگاری تغییر شکل‌ها می‌توان عکس‌العمل‌های مجهول تکیه‌گاهی را به سادگی و با استفاده

SAZE118.COM

از جدول 4-1 به‌دست آورد. عکس‌العمل تکیه‌گاهی و لنگرهای گیرداری برخی تیرهای متداول در جـدول 4-2 آورده شده است.

جدول 4-2، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و لنگرهای گیردار

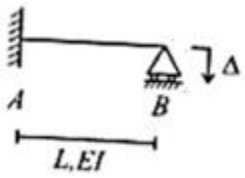


نشست تکیه‌گاهی

از روی تغییر شکل‌های سازگار زمانی برای نشست تکیه‌گاهی سازه‌های نامعین استفاده می‌گردد که سازه فقط یک درجه نامعینی داشته باشد.

SAZE118.COM

مثال ۲: اگر تکیه‌گاه B به اندازه‌ی Δ نشست کند، M_A برابر کدام است؟



1) $\frac{3EI\Delta}{L}$
2) $\frac{3\Delta L}{16}$
3) $\frac{3EI\Delta}{L^2}$
4) $\frac{3\Delta L^2}{16}$

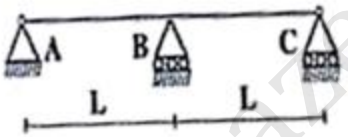
حل: گزینه‌ی «۳» صحیح است.

سازه یک درجه نامعین است. تکیه‌گاه B را حذف کرده و نیرویی هم جهت با جهت نشست در محل تکیه‌گاه حذف شده با نام R_B قرار می‌دهیم.

$$\Delta = \frac{R_B L^3}{3EI} \Rightarrow R_B = \frac{3EI\Delta}{L^3}$$

$$M_A = R_B \times L = \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

مثال ۳: اگر تکیه‌گاه B به اندازه Δ نشست کند، عکس‌العمل تکیه‌گاه C کدام است؟

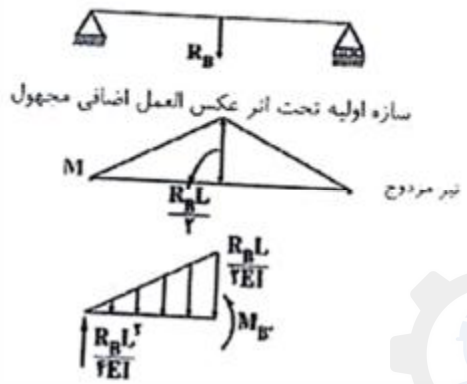


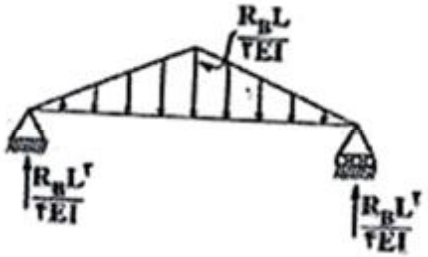
1) $\frac{2EI\Delta}{L^3}$
2) $\frac{3EI\Delta}{L^3}$
3) $\frac{4EI\Delta}{L^3}$
4) $\frac{6EI\Delta}{L^3}$

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

روش اول: تکیه گاه B را حذف می‌کنیم و عکس‌العمل آن را برسازه وارد می‌کنیم.

به دلیل نشست تکیه‌گاه B، بهتر است جهت R_B را به سمت پایین در نظر بگیریم. سازه اولیه را از روش تیر مزدوج تحلیل می‌کنیم.





SAZE118.COM

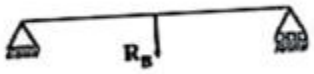
$$\sum M_{B'}=0\Rightarrow M_{B'}+\frac{1}{2}\frac{R_B L}{2EI}(L)(\frac{L}{3})-\frac{R_B L^2}{4EI}(L)=0\Rightarrow M_{B'}=\frac{R_B L^3}{6EI}$$

$$\Delta_B=-M_{B'}=\frac{-R_B L^3}{6EI}\Rightarrow R_B=\frac{6EI\Delta_B}{L^3}$$

از تحلیل سازه اولیه، مشخص است که $R_A=R_C=-\frac{R_B}{2}$ بنابراین داریم:

$$R_C=-\frac{R_B}{2}=\frac{3EI\Delta_B}{L^3}$$

روش دوم:



$$\Delta_B=\frac{R_B(2L)^3}{48EI}=\Delta\Rightarrow R_B=\frac{-6EI\Delta}{L^3}$$

$$R_A=R_C=\frac{1}{2}R_B=\frac{3EI\Delta}{L^3}$$

4-2 قضایای کاستلیانو (Castigliano's Theorems)

قضایا کاستلیانو جزو روش‌های انرژی هستند و برای محاسبه تغییر مکان و تحلیل سازه‌های نامعین به‌کار برده می‌شوند.

۴-۱-۱ قضیه اول کاستلیانو (روش نرمی)

اگر انرژی سازه، تابعی از تغییر مکان و چرخش گره‌های آن باشد، مشتق انرژی سازه نسبت به تغییر مکان هر گره، برابر است با نیرویی که در آن گره، در جهت تغییر مکان آن، اعمال شده است.

$$U(\Delta_i,\theta_i)\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial\Delta_i}=F_i \qquad \text{(الف-1-4)}$$

۴-۲-۲ قضیه دوم کاستلیانو (روش سختی)

اگر انرژی سازه، تابعی از نیرو و لنگر گره‌های آن باشد، مشتق انرژی سازه نسبت به نیروی هر گره، برابر است با تغییر مکان آن گره، در جهت نیروی وارد برآن.

$$U(F_i,M_i)\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial F_i}=\Delta_i \qquad \text{(الف-2-4)}$$

همچنین مشتق انرژی سازه نسبت به لنگر هر گره، برابر است با چرخش آن گره در جهت لنگر وارد بر آن.

$$U(F_i,M_i)\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial M_i}=\theta_i \qquad \text{(ب-2-4)}$$

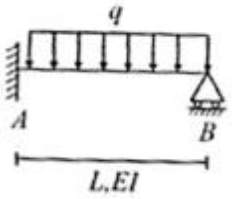
SAZE118.COM

قضیه دوم کاستلیانو، در تحلیل سازه‌های نامعین، به‌خصوص خرپاها و سازه‌های مرکب کاربرد دارد.

برای توضیح بیش‌تر این روش باید گفت در این روش عکس‌العمل‌های مجهول تکیه‌گاهی به‌صورت بارهای خارجی در محل تکیه‌گاه و متناظر با تکیه‌گاه برروی سازه در نظر گرفته می‌گردد.

سپس کل انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه را برحسب بارگذاری خارجی و بارهای متمرکز در محل قیدهای اضافی را می‌توانیم محاسبه کنیم. با توجه به این که تکیه‌گاه‌ها هیچ‌گونه نشستی ندارند، بنابراین باید مشتق انرژی کرنشی نسبت به هر یک از نیروهای متمرکز متناظر با قیدهای اضافی طبق قضیه دوم کاستلیانو، تغییر مکان در حل قیدهای حذف شده را نتیجه دهند. این مقدار برابر صفر است که بر طبق آن یک دستگاه n معادله، n مجهول به‌دست می‌آید و با حل این دستگاه، عکس‌العمل‌های مجهول تکیه‌گاهی به‌دست می‌آید.

مثال ۴: عکس‌العمل تکیه‌گاه B کدام است؟



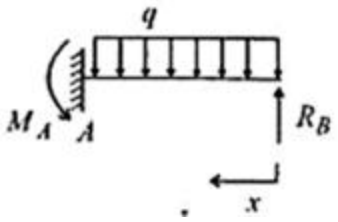
1) $\frac{qL}{4}$ 2) $\frac{3qL}{8}$

3) $\frac{qL}{2}$ 4) $\frac{5qL}{8}$

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

این مثال قبلاً با روش سازگاری، تغییر شکل‌ها حل شد، حال با روش قضیه دوم کاستلیانو حل می‌گردد.

ابتدا تکیه‌گاه B حذف و نیروی متناظر با عکس‌العمل تکیه‌گاهی را به جای آن می‌گذاریم.



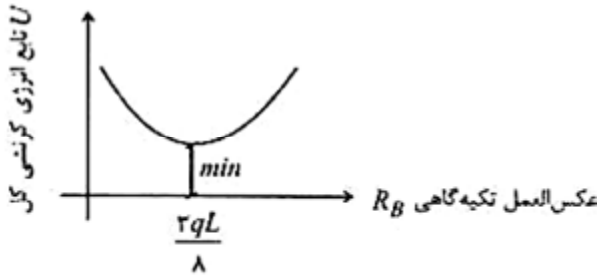
$$M_A = R_B.x - \frac{qx^2}{2}$$

انرژی کرنشی سازه: $U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^L \frac{R_B^2x^2 - R_B.qx^3 + \frac{qx^4}{4}}{2EI} \times \mu$

تابع انرژی کرنشی $U = \frac{R_B^2L^3}{6EI} - \frac{R_AqL^4}{8EI} + \frac{qL^5}{4.EI}$

SAZE118.COM

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{R_B.L^3}{3EI} - \frac{qL^4}{8EI} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3}{8}qL$$



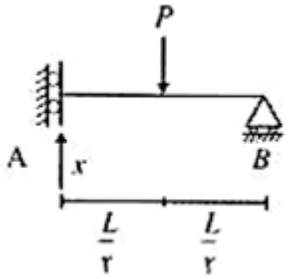
اگر مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_B را متغیر بگیریم، هنگامی مقدار آن به‌دست می‌آید که انرژی کرنشی کل سازه را مینیمم کند. اکنون قضیه حداقل انرژی (مینیمم کار) با توجه به این نکته بیان می‌گردد.

قضیه حداقل انرژی (مینیمم کار)

با توجه به قضیه دوم کاستلیانو و در صورت عدم نشست تکیه‌گاهی در سازه می‌توان بیان کرد:

عکس‌العمل‌های مجهول تکیه‌گاهی در یک سازه‌ی نامعین باید به قسمی باشند که انرژی کرنشی کل سازه را مینیمم کنند.

مثال ۵: نیروی x چقدر باشد تا انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه مینیمم گردد؟



1) صفر
2) $\frac{9P}{13}$
3) $\frac{P}{2}$
4) $\frac{11P}{16}$

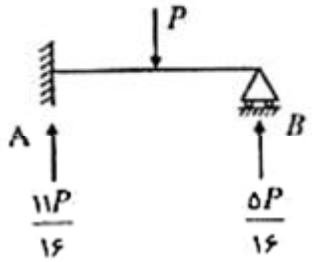
حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای مینیمم شدن انرژی کرنشی سازه باید $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ باشد. از طرفی طبق قضیه دوم کاستلیانو $\frac{\partial U}{\partial x} = \Delta_A^V$ می‌باشد.

بنابراین Δ_B^V نیز برابر صفر خواهد بود.

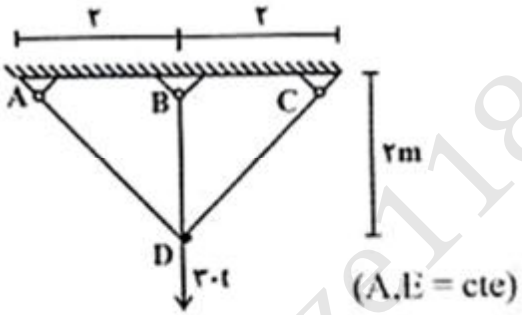
لذا سازه تبدیل به سازه زیر می‌گردد که عکس‌العمل تکیه‌گاهی را می‌توان از روش تغییر شکل‌های با استفاده از جدول 4-2 ملاحظه می‌شود $R_B = \frac{5P}{16}$ است. پس اگر $X = \frac{11P}{16}$ باشد، انرژی داخلی سازه، مینیمم می‌گردد.

SAZE118.COM



* نکته 1: اگر بخواهیم انرژی داخلی یک سازه تحت بارگذاری مجهول، کم‌ترین مقدار باشد، نباید تغییر مکان و دوران داشته باشیم.

مثال ۶: نیروی عضو CD خرپای زیر کدام است؟



1) 5/51t

2) 7/07t

3) 7/5t

4) 8/79t

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.

نیروی عضو CD را F در نظر می‌گیریم. انرژی داخلی سازه، طبق رابطه 3-2 برابر است با:

$$U=\sum\frac{P_i^2L}{2AE}$$

با استفاده از قضیه دوم کاستلیانو و با توجه به اینکه گره C تغییر مکان ندارد، داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial f}=\sum\frac{2P_i(\frac{\partial P_i}{\partial F})L}{2AE}=0$$

$$=\sum\frac{p_iL}{AE}(\frac{\partial p_i}{\partial F})=0 \qquad (1)$$

از تحلیل گره D، نیروی P_1 تا P_3 را به‌دست می‌آوریم و خواهیم داشت:

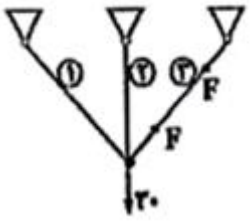
SAZE118.COM

سنجش دانش

$$P_1 = F \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial F} = 1$$

$$P_2 = 30 - \sqrt{2}F \Rightarrow \frac{\partial P_2}{\partial F} = -\sqrt{2}$$

$$P_3 = F \Rightarrow \frac{\partial P_3}{\partial F} = 1$$



$$(1) \quad \Rightarrow \frac{F(2\sqrt{2})}{AE}(1) + \frac{(30-\sqrt{2}F)}{AE}(-\sqrt{2}) + \frac{F(2\sqrt{2})}{AE}(1) = 0$$

$$\frac{4\sqrt{2}F}{AE} + \frac{-60\sqrt{2}+4F}{AE} = 0 \Rightarrow 4F(\sqrt{2}+1) - 60\sqrt{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{60\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} = 8/79t$$

4-1- شیب - افت

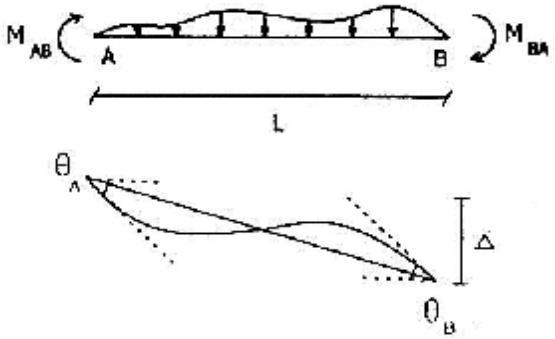
شیب- افت رابطه ای برای لنگر در انتهای عضو براساس چهار عامل می دهد که عبارتند از:

اول و دوم دوران خطوط ممان بر منحی الاستیک دردو انتهای عضو نسبت به موقعیت اولیه ، سوم دوران خط و اصل دو انتهای منحنی الاستیک (دوران عضو) و چهارم اثر نیروهای خارجی مؤثر بر عضو.

روابط شیب – افت برای تیر مقابل به صورت زیر تعریف می گردند:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left[2q_A + q_B - 3\frac{\Delta}{L}\right] + M_{AB}^F$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left[2q_A + q_B - 3\frac{\Delta}{L}\right] + M_{BA}^F$$



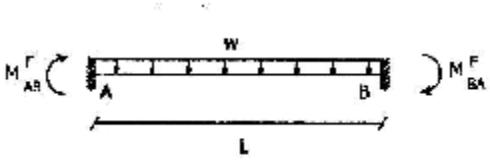
برای سهولت کار با روش شیب- افت قرارداد علامت زیر را به کار می بریم:

1- ممانها و دوران های دوسر را در جهت ساعتگرد مثبت می گیریم.

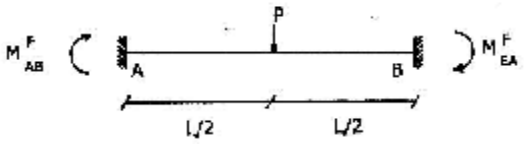
2- در صورتی که Δ ایجاد شده باعث دوران عضو درجهت ساعتگرد شود، Δ مثبت خواهد بود و درغیر اینصورت Δ منفی می شود.

SAZE118.COM

M^F : ممان گیرداری دو سر یک تیر دو سر گیردار تحت اثر بار وارد بر تیر می باشد که برای چند بارگذاری متداول به صورت زیر است:

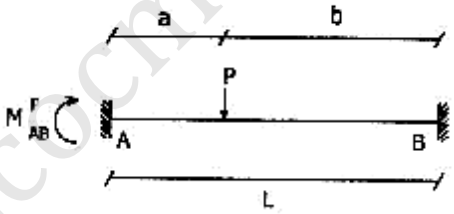


$$M_{AB}^F = \frac{WL^2}{12} \qquad M_{BA}^F = \frac{WL^2}{12}$$



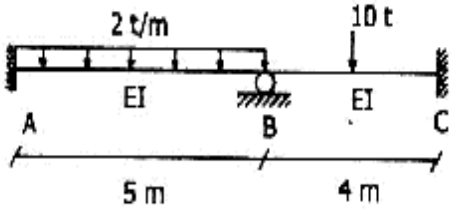
$$M_{AB}^F = \frac{PL}{8} \qquad M_{BA}^F = \frac{PL}{8}$$

$$M_{BA}^F = \frac{Pa^2b}{L^2} \qquad M_{BA}^F = \frac{Pab^2}{L^2}$$



در حل مساله با روش شیب – افت ابتدا باید درجات آزادی سازه را شناسایی کنیم. سپس با نوشتن معادلات تعادل نیرویی ، با استفاده از درجات آزادی مجهول، مقدار درجات آزادی را بدست می آوریم و ازروی آنها و نوشتن معادلات شیب- افت ممانهای گره های مختلف و از آنجا نیروهای تکیه گاه ها را بدست می آوریم

مثال: نیروی برشی تکیه گاه A را بیابید.



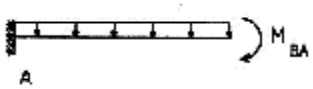
$$M_{AB} = \frac{2EI}{5}\left[2q_{/A} + q_B - 3\frac{\Delta^\circ}{L}\right] - \frac{2\times5^2}{12}$$

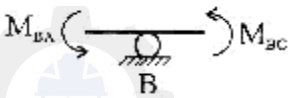
$$M_{BA} = \frac{2EI}{5}[2q_B] + \frac{2\times5^2}{12}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{4}[2q_B] + \frac{10\times4}{8}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{4}[2q_B] + \frac{10\times4}{8}$$

حال قطعات سازه را از یکدیگر جدا می کنیم.





SAZE118.COM

واضح است که مجموع ممانها درگره B باید صفر گردد.

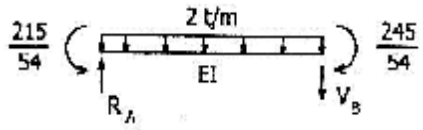
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{4EI}{5} q_B + \frac{25}{6} + EIq_B - 5 = 0$$

$$\Rightarrow q_B = \frac{25}{54EI}$$

$$\Rightarrow M_{AB} = \frac{2EI}{5}\left[\frac{52}{54EI}\right] - \frac{25}{6} = -\frac{215}{54}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{5}\left[2\times\frac{25}{54EI}\right] + \frac{25}{6} = \frac{245}{54}$$

با نوشتن تعادل ممان حول B در تیر AB، نیروی برشی تکیه گاه A بدست می آید.



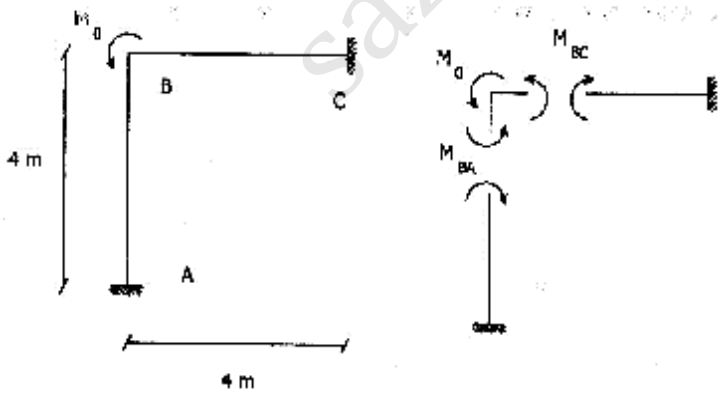
$$\sum M_B = 0 R_A \times 5 = \frac{215}{54} + \frac{2\times 5^2}{2} - \frac{245}{54}$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{44}{9}$$

۴-۱-۱- قابها بدون تغییر مکان جانبی

در این قابها با نوشتن معادلات تعادل ممان در گره ها، q های مجهول بدست می آیند.

مثال: لنگر تکیه گاه A را بدست آورید.



$$M_{BA} = \frac{2EI}{4}[2q_B]$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{4}[2q_B]$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} + M_\circ = 0 \Rightarrow q_B = -\frac{M_\circ}{2EI}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{4}[q_B] = \frac{2EI}{4}\left[-\frac{M_0}{2EI}\right] = -\frac{M_0}{4}$$

جهت ممان در تکیه گاه A خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت است.

SAZE118.COM

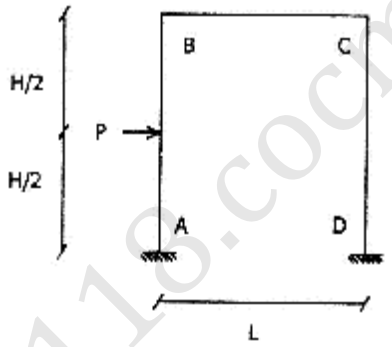
۴-۱-۲- قاب ها با تغییر مکان جانبی

در این قابها علاوه بر معادلات تعادل ممان، باید به تعداد تغییر مکان جانبی، معادله تعادل برش در قسمتی از سازه و یا کل سازه بنویسیم.

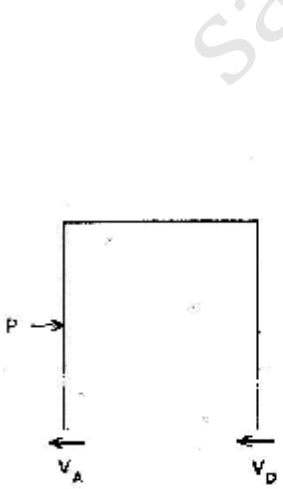
مثال: سه معادله تعادل نیرویی برای حل قاب 3 درجه آزادی مقابل بیابید.

ابتدا درجات آزادی را می یابیم: $\Delta_B = \Delta_C = ?, q_C = ?, q_B = ?$

دو معادله به راحتی به دست می آیند: $\sum M_B = \mathbf{0}, \sum M_C = \mathbf{0}$



برای معادله سوم V_D, V_A را بر حسب M ها بدست می آوریم و خواهیم داشت. $V_A + V_D = P$



$$\sum M_B = \mathbf{0} \Rightarrow V_A \times H = P \times \frac{H}{2} - M_{BA} - M_{AB}$$

$$V_A = \frac{1}{2}P - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{h}$$

$$\sum M_C = \mathbf{0} \Rightarrow V_D \times H = -M_{CD} - M_{DC}$$

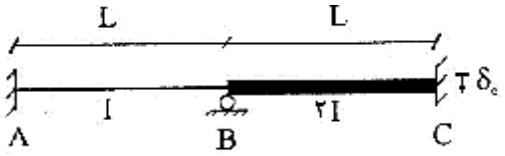
$$V_D = -\frac{M_{CD} + M_{DC}}{H}$$

SAZE118.COM

و بنابراین خواهیم داشت:

معادله سوم: $V_A + V_D = P \Rightarrow M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} = -\frac{PH}{2}$

مثال: چرخش تکیه گاه B در اثر نشست تکیه گاه C به اندازه d را بدست آورید.



$$M_{BC} = \frac{2E(2I)}{L}\left[2q_B - \frac{3d}{L}\right]$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}[2q_B]$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0 \Rightarrow 4\left[2q_B - \frac{3d}{L}\right] + 4q_B = 0 \Rightarrow q_B = \frac{1}{4}\frac{d}{L}$$

4-4 روش پخش لنگر (Momet Distribution)

این روش یکی از روش‌های سختی است که در آن از تغییر شکل‌های محوری و برشی صرف‌نظر می‌گردد. (مانند روش شیب افت) اساس این روش برمبنای تعادل گره‌ها و تقسیم لنگر در هر گره به نسبت سختی اعضای متصل به آن گره می‌باشد.

برای تحلیل سازه‌ها به روش پخش لنگر، گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: گیردار فرض کردن کلیه اتصالات و تکیه‌گاه‌ها.

گام دوم: محاسبه لنگر گیرداری انتهای اتصالات.

گام سوم: نوشتن معادله تعادل در هر اتصال (محاسبه M_i)

$$M_{ij} + M_{ik} + \ldots = M_i$$

گام چهارم: پخش لنگر متعادل $(-M_i)$ به نسبت سختی، بین اعضای اتصال

$$K_{ij} = \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} \quad \text{ضریب سختی دوران} \qquad (6\text{-}4)$$

$$D_{ij} = \frac{K_{ij}}{\Sigma K} \quad \text{ضریب پخش} \qquad (7\text{-}4)$$

گام پنجم: انتقال لنگرها از اتصال به انتهای دور عضو (ضریب انتقال برای اعضای منشوری برابر است با: $C_{ij} = 0/5$)

گام ششم: با انتقال لنگرها، تعادل برهم می‌خورد. گام‌های سوم تا پنجم آن‌قدر تکرار می‌شود تا در اتصال، M_i برابر صفر گردد.

* نکته 2: اگر انتهای عضوی در سازه اصلی، مفصلی باشد، می‌توان از سختی اصلاح شده $K = \frac{3EI}{L}$ برای آن عضو

SAZE118.COM

استفاده نمود. در این‌صورت، با یک بار انتقال لنگر از انتهای مفصلی به انتهای دیگر عضو، می‌توان محاسبات را پایان داد. همچنین ضریب پخش تکیه‌گاه گیردار صفر می‌باشد.

۴-۲-۱- قابها بدون جابجایی جانبی

در روش پخش لنگر ابتدا جلوی دوران درجات آزادی را می گیریم یا اصطلاحاً آنها را قفل می کنیم. سپس لنگر گیرداری را برای انتهای هر عضو محاسبه کرده جلوی آن می نویسیم. حال نوبت آزاد کردن یک به یک گره ها می باشد. هر گره را به این صورت آزاد می کنیم که ممانی مخالف و ازنظر اندازه برابر مجموع ممانهای گیرداری اعضای وارد بر گره، به آن وارد می کنیم. این ممان به نسبت ضرایب توزیع بین اعضاء واردشده به گره پخش می شود. سپس به نسبت ضریب انتقال هر عضو ، ممان به انتهای دور اعضاء که هنوز قفل می باشند می رود. حال این گره که به تعادل رسیده است را قفل کرده و به سراغ گره دیگر می رویم و این کار را اینقدر ادامه می دهیم تا ممانهای انتقال یافته بین اعضاء به اندازه کافی کوچک شوند. در پایان برای بدست آوردن لنگر انتهای هر عضو کافی است مجموع لنگرهای گیرداری و لنگرهای وارد شده به عضو را جمع کنیم.

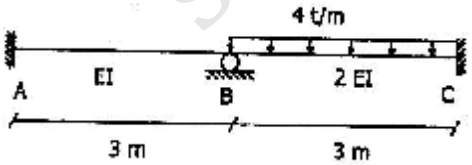
نکته: در آزادکردن گره چنانچه عضو یا اعضایی به صورت مفصلی به گره وصل شده باشند، هر کدام جداگانه آزاد یا قفل می شوند و هیچکدام از دیگری سهم ممانی نمی برد.

نکته: سختی عضوهای صلب را ∞ بگیرید.

نکته: تکیه گاه گیردار را عضوی با سختی ∞ بگیرید.

نکته: سختی تکیه گاه مفصل برابر صفر می باشد.

مثال: لنگرهای انتهایی سازه مقابل را بیابید.



ضرایب توزیع در B را حساب می کنیم.

$$K_{BA}=\frac{I}{L}=\frac{I}{3},K_{BC}=\frac{2I}{3}\Rightarrow D_{BA}=\frac{1}{3},D_{BC}=\frac{2}{3}$$

saze118.com

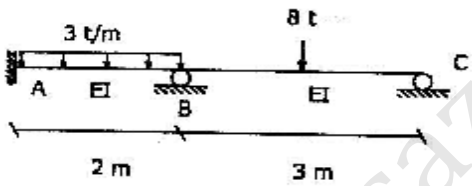
AB		BA	BC		CD	
		$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	ضریب توزیع
		0	-3		+3	لنگرهای گیرداری
0/5	←	+1	+2	→	+1	آزاد کردن گره B
0/5		+1	-1		+4	$\sum M$

ساعتگرد $M_{CB}=+4t.m$ ساعتگرد $\Rightarrow M_{AB}=0/5t.m$

نکته: همانطور که می بینید جمع ممانهای دو طرف در B برابر صفر می باشد: $M_{BA}+M_{BC}=0$

نکته: از آنجایی که تکیه گاه گیردار تمام ممان را جذب می کند، دیگر پس ازآزاد کردن گره های C,A ، ممان به سمت گره B نمی رود.

مثال: لنگر انتهای تکیه گاه A را بدست آورید.



ضریب توزیع در گره B را حساب می کنیم : $D_{BA}=\frac{3}{5}, D_{BC}=\frac{2}{5}$

SAZE118.COM

	CD		BC		BA		AB
ضریب توزیع	$\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$		
لنگرهای گیرداری	+۳		-۳		+۱		-۱
آزاد کردن گره B	+۰/٤	→			+۱	←	۰/۵
	+۰/۸						
آزاد کردن گره C	-۳/٤	←	-۱/۷				
	+۰/۳٤	→					
	+۰/٦۸				+۰/۱	←	۰/۰۵
	-۰/۳٤	←	-۰/۱۷				
	+۰/۰۳	→					
	+۰/۰۷						
	-۰/۰۳						
$\sum M$	۰				+۳/۳۲		
	-۳/۳۲				+۰/۱٦		

ساعتگرد $\Rightarrow M_{AB} = \mathbf{0}/16t.m$

توجه: در آخرین مرحله پس از آزادکردن گره C به دلیل کوچکی مقدار انتقالی ازآن صرفنظر شده،

مساله به پایان رسید.

سختی اصلاح شده

همانطور که در مثال قبل مشاهده کردید وجود تکیه گاه مفصلی باعث شد که مسأله طولانی شود. در حالی که می توانستیم برای تیر BC وجود تکیه گاه مفصلی را درمحاسبه سختی تیر پیش بینی کرده، از سختی اصلاح شده استفاده کنیم و دیگر ممان انتقالی از B به C نداشته باشیم.

سختی اصلاح شده را برای تیری با انتهای دور مفصلی، و سازه پادمتقارن بدست آوریم

saze118.com

SAZE118.COM

انتهای مفصلی:

$$q_B = 1$$

$$M_{AB} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{L}[2q_A + q_B] = 0 \Rightarrow q_A = -\frac{1}{2}q_B = -\frac{1}{2}$$

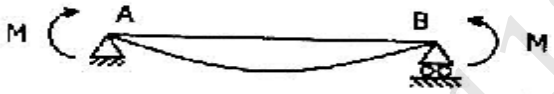
$$M = M_{BA} = \frac{2EI}{L}[2q_B + q_A]$$

$$\Rightarrow M = \frac{3EI}{L} = \frac{3}{4} \times \frac{4EL}{L} = \frac{3}{4}K'_{BA}$$

ضریب اصلاح سختی برای انتهای مفصل $\frac{3}{4}$ می باشد.

تذکر: وقتی سختی تکیه گاه مفصل را اصلاح می کنیم، همانند قبل ، برای این تکیه گاه ممان گیرداری را بدست آورده و در اولین مرحله، این گره را آزاد می کنیم و دیگر کاری با آن نخواهیم داشت.

سازه متقارن:



$$q_A = -q_B = 1$$

$$M = M_{AB} = \frac{2EI}{L}[2q_A + q_B] = \frac{2EIq}{L}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{2}K'_{AB}$$

ضریب اصلاح سختی برای سازه متقارن $\frac{1}{2}$ می باشد.

بنابراین در سازه متقارن، سختی عضوی که بر اثر متقارن به دو نیم می شود اصلاح می گردد و دیگر ممانی به سمت نیمه متقارن سازه نمی رود.

سازه پاد متقارن:

$$q_A = q_B = 1$$

$$M = M_{AB} = \frac{2EI}{L}[2q_A + q_B]$$

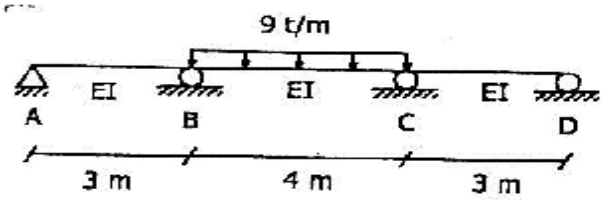
$$\Rightarrow M = \frac{6EI}{L}q = \frac{3}{2}K'_{AB}q$$

ضریب اصلاح سختی سازه پاد متقارن $\frac{3}{2}$ می باشد.

SAZE118.COM

بنابراین درسازه پادمتقارن نیز سختی عضوی که بر اثر متقارن به دو نیم می شود اصلاح گشته و دیگر ممان به سمت نیمه متقارن نمی رود.

مثال: برای تیر مقابل، ممان در C را بیابید.



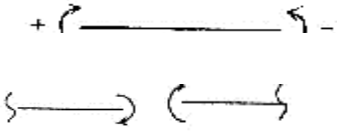
سختی CB به دلیل متقارن و سختی CD به دلیل مفصلی بودن باید اصلاح گردد.

$$K_{CB}=\frac{1}{2}\times\frac{I}{4}=\frac{I}{8},k_{CD}=\frac{3}{4}\times\frac{I}{3}=\frac{I}{4}\Rightarrow D_{CD}=\frac{1}{3},D_{CD}=\frac{2}{3}$$

حال عملیات قفل کردن و آزاد کردن گره ها را روی نیمی از سازه انجام می دهیم.

	CD	CD	BC	تقارن
ضریب توزیع	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
لنگرهای گیرداری			+12	
آزاد کردن گره C	-8		-4	
$\sum M$	0	-8	+8	

حال علامت ممان در C را با توجه به قرارداد ممان مثبت می یابیم.



$$M_{CB}=+8 \qquad M_{CD}=-8 \qquad \Rightarrow M_B=-8t.m$$

تیرهای غیر منشوری:

در تیرهایی که ممان اینرسی در طول آنها ثابت نیست باید ضریب انتقال لنگر را از هر طرف به طرف دیگر بدست آورد.

رابطه مقابل در همه تیرها از جمله تیرهای غیر منشوری برقرار است:

SAZE118.COM

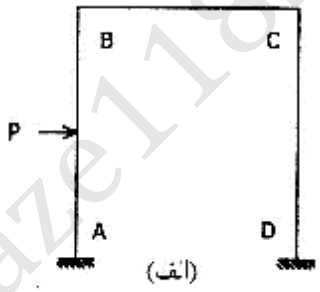
$$K'_{AB}C_{AB} = K'_{BA}C_{BA}$$

نکته: هر گاه در سازه ای دوران و یا تغییر مکان ایجاد کنیم، می توان این دوران یا تغییر مکان معلوم را با روابط شیب-افت به M^F تبدیل کرده و مساله را با پخش لنگر حل نمود.

۴-۲-۲- قاب ها با تغییر مکان جانبی

حل قابهای با تغییر مکان جانبی با روش پخش لنگر طولانی می باشد به همین دلیل استفاده از پخش لنگر برای حل اینگونه قابها در تست های کنکور اصلاً توصیه نمی گردد. در این قسمت به توضیحی کوتاه درباره روش حل اینگونه قابها با پخش لنگر اکتفا می گردد.

سازه « الف » را در نظر بگیرید. ابتدا در گره C تکیه گاهی قرار می دهیم تا جلوی تغییر مکان جانبی را بگیرد ، سازه شکل « ب » سازه جدید را حل کرده و عکس العمل R را بدست می آوریم.

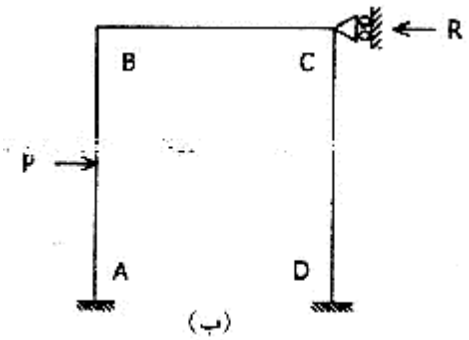


سپس در تکیه گاه C یک نشست مجازی در جهت خلاف نیروی R ایجاد می کنیم. مقدار این نشست دلخواه است.

حال MF را حساب می کنیم.

$$M^F_{AB} = M^F_{BA} = M^F_{DC} = M^F_{DC} = -\frac{6}{EI}\frac{\Delta}{L}$$

SAZE118.COM

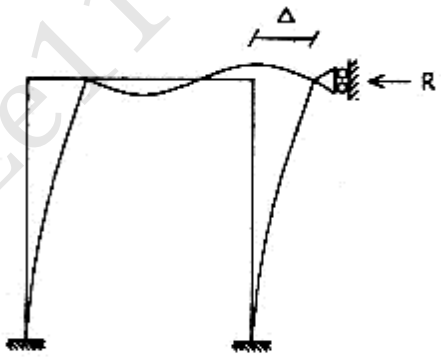


(ب)

نمودار 'R ایجاد شده در تکیه گاهیC ناشی از این نشست را بدست می آوریم. با توجه به اینکه در سازه اصلی، « الف» ، نیرویی در نقطه C وجود ندارد، معادله زیر را حل کرده و x را به دست می آوریم:

R+xR'=0

واضح است که سازه اصلی را می توان از سوپرپوزیشن سازه « ب » به همراه x برابر سازه « ج» به دست آورد.



(ج)

saze118.com

SAZE118.COM

نکات کلیدی فصل چهارم

ـ رابطه شیب افت به صورت زیر می باشد:

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left[2q_A+q_B-3\frac{\Delta}{L}\right]+M_{AB}^{F}$$

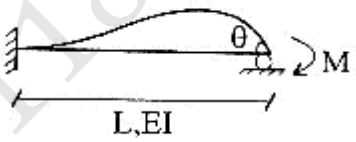
ـ در روش شیب ـ افت، ممان ها و دوران ها را درجهت ساعتگرد مثبت در نظر گرفته می شود. در صورتی کـه Δ ایجـاد شده باعث چرخش عضو در جهت ساعتگرد شود، Δ مثبت و در غیر اینصورت Δ منفی خواهد بود.

ـ در استفاده از روش شیب ـ افت، شناسایی درجات آزادی مستقل سازه بسیار مهم می باشد.

ـ در روش شیب ـ افت، به ازاء هر درجه آزادی دورانی، یک معادله تعادل برای ممان و به ازاء هـر درجـه آزادی انتقـالی، یک معادله تعادل برای برش می توان نوشت.

ـ سختی دورن تیر مقابل برابر است با :

$$k'=\frac{4EI}{L}\Rightarrow q=\frac{ML}{4EI}$$



ـ همواره مجموع ضرایب توزیع در یک گره برابر یک می باشد.

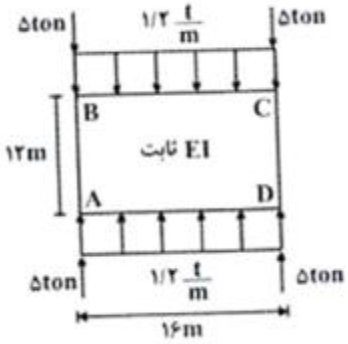
ـ ضریب اصلاح سختی برای انتهای دور مفصل $\frac{3}{4}$، سازه متقارن $\frac{1}{2}$ و سازه پادمتقارن $\frac{3}{2}$ می باشد.

ـ برای حل سازه هایی که دارای جانبی می باشند، روش پخش لنگر مفید نمی باشد مگر اینکه بتوان این سازه را به سازه های متقارن و یا پادمتقارن بدون جابجایی جانبی تبدیل نمود.

SAZE118.COM

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱- در سازهٔ شکل زیر چرخش θ_B چقدر است؟



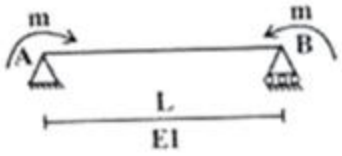
1) $\frac{25/6}{EI}$

2) $\frac{614/4}{EI}$

3) $\frac{43/9}{EI}$

4) $\frac{87/8}{EI}$

۲- مقدارهای انحراف A از مماس بر B و نیز دوران A کدام‌اند؟



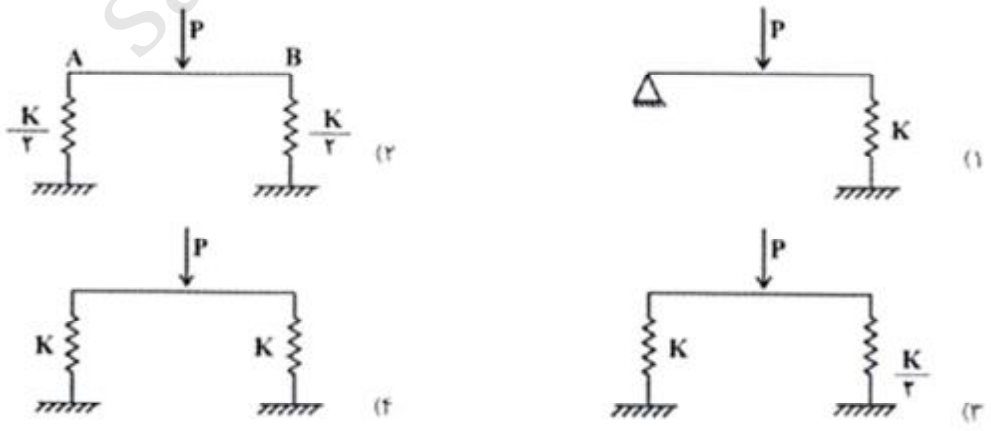
1) $\frac{mL}{3EI}, \frac{mL^2}{3EI}$

2) $\frac{mL}{EI}, \frac{mL^2}{EI}$

3) $\frac{mL}{4EI}, \frac{mL^2}{4EI}$

4) $\frac{mL}{2EI}, \frac{mL^2}{2EI}$

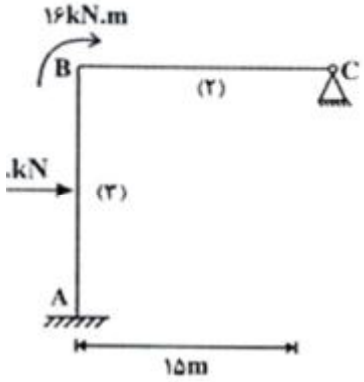
۳- در کدام‌یک از سازه‌های زیر انرژی بیش‌تری ذخیره می‌شود؟ (EI در کلیه تیرها یکسان است.)



saze118.com

saze118.com

۴- اعداد نوشته شده داخل پرانتز مقادیر نسبی $\frac{I}{l}$ اعضا می‌باشد. M_A اعضا می‌باشد. M_A را حساب کنید.



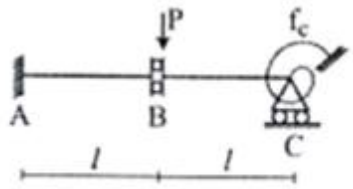
1) $-4/33 kN.m$

2) $-16/33 kN.m$

3) $-21/33 kN.m$

4) $-40/33 kN.m$

۵- در تیر شکل زیر مقدار لنگر فنر را محاسبه نمایید. صلبیت خمشی اعضاء **EI**، طول اعضاء **l** و ضریب نرمی فنر $f_c = \frac{1}{EL}$ است. (ضریب نرمی عکس ضریب سختی است.)



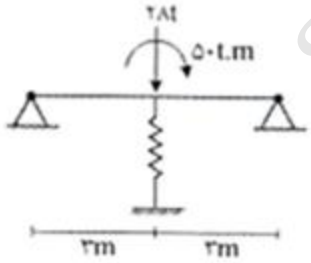
1) صفر

2) pl

3) $2pl$

4) $\frac{pl}{2}$

۶- تیر شکل مقابل با صلبیّت خمشی $5400 t.m^2$ در وسط دهانه بر فنری به سختی $200 \frac{t}{m}$ اتکاء دارد. نیرو در فنر برحسب **ton** چقدر است؟



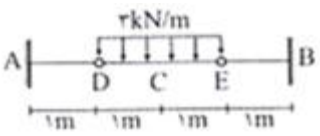
1) 4

2) 7

3) 10

4) 28

۷- Δ_c را حساب کنید. (**EI** کلیه اعضاء را ثابت فرض کنید.)



1) $\frac{1}{EI}$

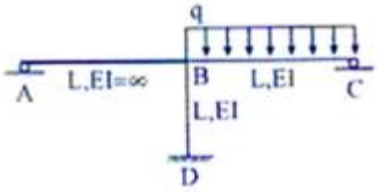
2) $\frac{1/5}{EI}$

3) $\frac{1/625}{EI}$

4) $\frac{0/625}{EI}$

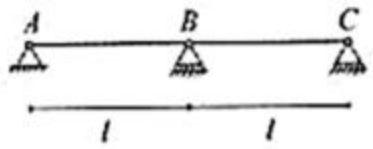
SAZE118.COM

۸- در سازه نشان داده شده عکس‌العمل A کدام است؟



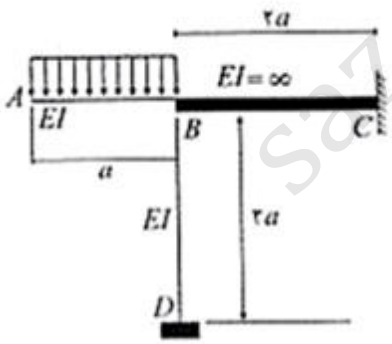
1) $\frac{qL}{4}$
2) $\frac{qL}{2}$
3) $\frac{qL}{12}$
4) $\frac{qL}{8}$

۹- تیر دو دهانه ABC مفروض است. دهانه AB با صلبیت خمشی EI و دهانه‌ی BC با صلبیت خمشی بی‌نهایت است. اگر تکیه‌گاه C به اندازه‌ی δ به سمت بالا حرکت کند لنگر خمشی تکیه‌گاه B را محاسبه کنید.



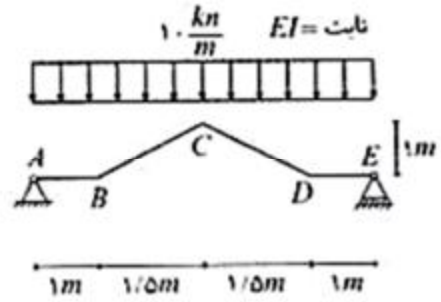
1) $\frac{EI\delta}{L^2}$
2) $\frac{2EI\delta}{L^2}$
3) $\frac{3EI\delta}{L^2}$
4) $\frac{6EI\delta}{\delta^2}$

۱۰- در قاب مقابل لنگر انتهای B در ستون BD چقدر است؟



1) صفر
2) $\omega\alpha^3 / 2$
3) $2\omega\alpha^2 / 3$
4) $\omega\alpha^3 / 4$

۱۱- شیب نقطه C را محاسبه کنید؟

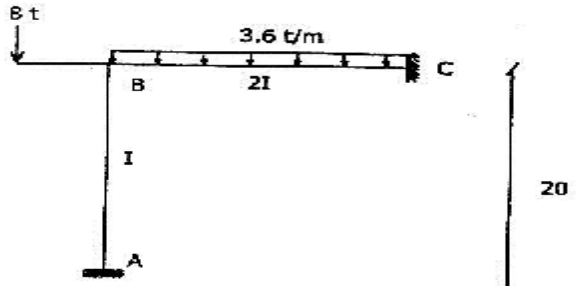


1) صفر
2) $\frac{2}{EI}$
3) $\frac{3}{EI}$
4) $\frac{8}{EI}$

SAZE118.COM

سنجش دانش

۱۲ـ ممان در تکیه گاه A برابر است با :



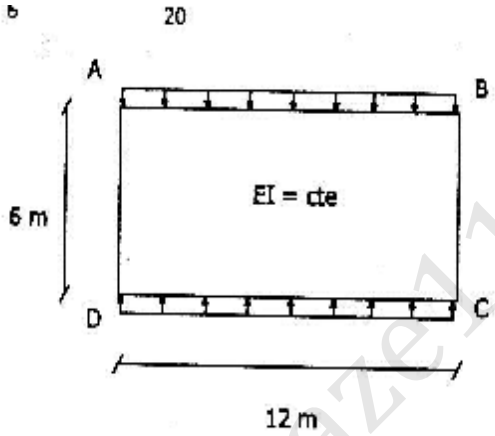
1) 12t.m

2) 18 t.m

3) 24 t.m

4) 8 t.m

۱۳ـ M_{BA} را پیدا کنید



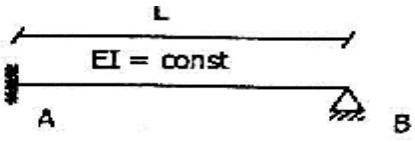
1) -12 t.m

2) -16 t.m

3) -8 t.m

4) 12 t.m

۱۳ـ در شکل زیر اگر Δ تغییر مکان در اثر نشست باشد، گشتاورهای گیرداری در دو انتهای تیر برابر است با:



1) $M_{BA}=0, M_{AB}=-\frac{3EI\Delta}{L^2}$

2) $M_{BA}=0, M_{AB}=-\frac{4EI\Delta}{L^2}$

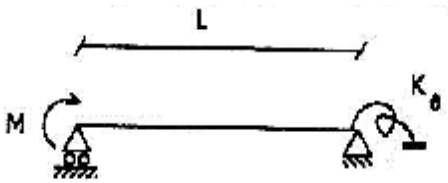
3) $M_{BA}=0, M_{AB}=-\frac{3EI\Delta}{4L^2}$

4) $M_{BA}=0, M_{AB}=-\frac{6EI\Delta}{L^2}$

saze118.com

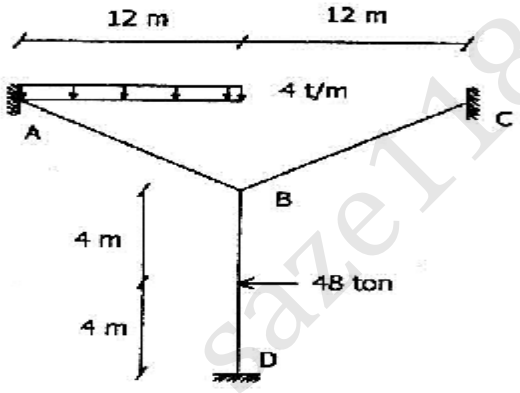
SAZE118.COM

۱۴ـ در تیر مقابل صلیب خمش تیر EI، مقدار سختی در $K_q = \frac{6EI}{L}$ است، در فنر چه لنگری بوجود می آید؟ تنها اثر خمش مورد نظر است.



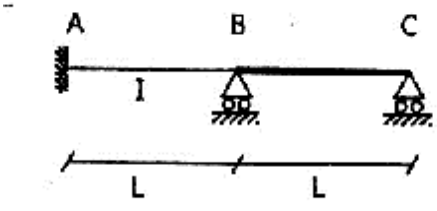
1) $\frac{M}{3}$
2) $\frac{M}{4}$
3) M
4) $\frac{M}{2}$

۱۵ـ کدامیک از گزینه ها در سازه شکل زیر صحیح است؟ EI برای تمام اعضاء ثابت است و تغییر شکل محوری اعضاء قابل صرفنظر کردن می باشد.



1) $M_{BC} = 12t.m \quad M_{BD} = -48t.m, M_{BA} = 36t.m$
2) $M_{BC} = -12t.m \quad M_{BD} = -36t.m, M_{BA} = 48t.m$
3) $M_{BC} = 0t.m \quad M_{BD} = -48t.m, M_{BA} = 48t.m$
4) $M_{BC} = 12t.m \quad M_{BD} = -36t.m, M_{BA} = 24t.m$

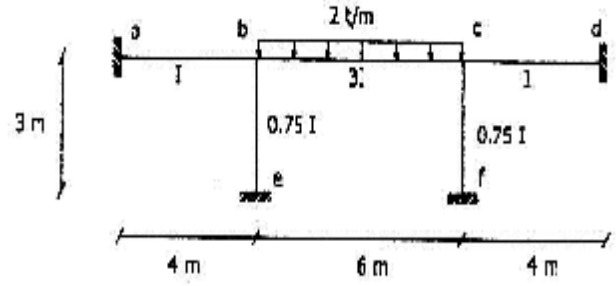
۱۶ـ قدرمطلق لنگر خمشی در تکیه گاه گیردار A زیر اثر نشست قائم تکیه گاه b به اندازه d را حساب کنید.



1) $\frac{8dEI}{L^2}$
2) $\frac{12dEI}{L^2}$
3) $\frac{16dEI}{L^2}$
4) $\frac{dEI}{L^2}$

SAZE118.COM

۱۷ـ در سازه زیر لنگر M_{ab} چقدر می باشد.



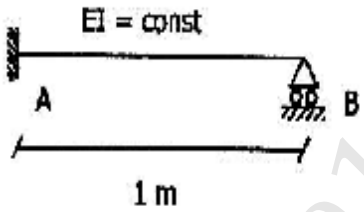
1) 0/5 t.m

2) 4 t.m

3) 2 t.m

4) 1 t.m

۱۸ـ اگر تکیه گاه مفصل B نشستی به مقدار $\Delta = \frac{3}{EI}$ داشته باشد لنگر تکیه گاهی در A چند K.N.m خواهد بود؟



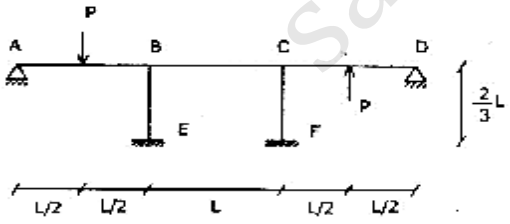
1) -18

2) -9

3) -6

4) -3

۱۹ـ با توجه به شکل مقابل M_{BA} چقدر است؟



1) $-\frac{PL}{16}$

2) $-\frac{3PL}{20}$

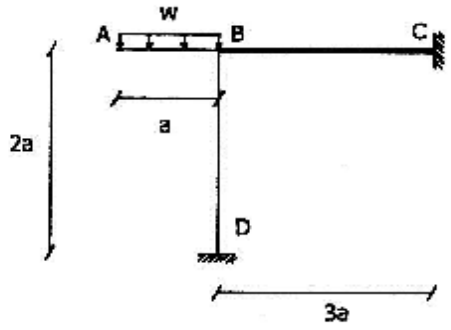
3) $-\frac{PL}{8}$

4) $-\frac{PL}{20}$

saze118.com

SAZE118.COM

۲۰- در قاب مقابل اگر صلبیت خمشی عضو BC بی نهایت باشد لنگر ستون BD بر انتهای B برابر کدام است؟



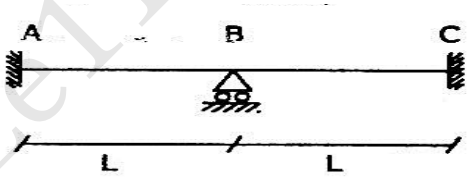
1) صفر

2) $\frac{wa^2}{2}$

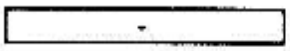
3) $\frac{wa^2}{4}$

4) $\frac{2wa^2}{3}$

۲۱- نمودار لنگر خمشی برای تیرشکل مقابل که تکیه گاه وسط آن به اندازه Δ به سمت پایین نشست کرده است کدامیک از گزینه های زیر است؟

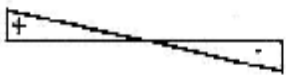


۱)

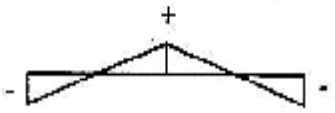


۲)

۳)



۴)

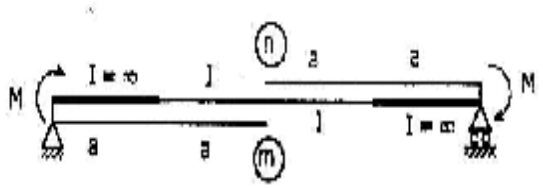


saze118.com

saze118.com

سنجش دانش

۲۲- فاصله قائم نقاط m و n پس از اثر گشتاورها در دو انتهای تیر خمیده مطابق شکل بدست آورید.



1) $\frac{Ma^2}{EI}$

2) $\frac{Ma^2}{2EI}$

3) $\frac{Ma^2}{3EI}$

4) $\frac{2Ma^2}{3EI}$

۲۳- در روش شیب ـ افت کدامیک از فرضیات زیر در نظر گرفته می شود؟

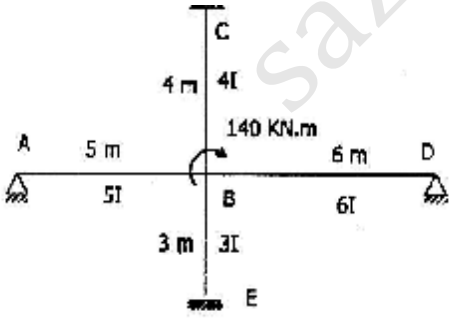
1) از تغییر شکل های خمشی صرفنظر می شود.

2) از نیروها محوری صرفنظر می شود.

3) از تغییر شکل های محوری صرفنظر می شود.

4) از نیروها و تغییر شکلهای محوری صرفنظرمی شود.

۲۴- عکس العمل تکیه گاه A ، R_A ، چند KN است؟



1) 28

2) 12/73

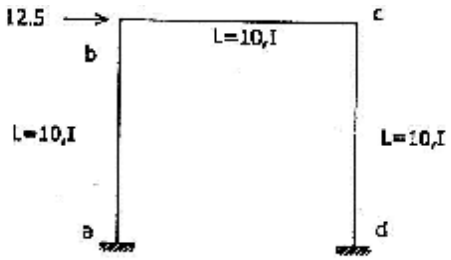
3) 7

4) 6

saze118.com

SAZE118.COM

۲۵- قابل متقارن زیر با بار جانبی ۱۲/۵ مفروض است. لنگر M_{ab} برابر است با :



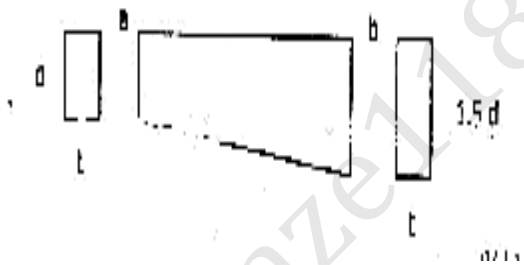
1) M_{ab} = -37/5

2) M_{ab} = 50

3) M_{ab} = -75

4) M_{ab} = -150

۲۶- برای تیر مقطع متغیر زیر C_{ab}= ۰/۶۷۵، $S_{ab}=5/41\left(\frac{EIa}{L}\right)$ و $S_{ba}=9/90\left(\frac{EIa}{L}\right)$ می باشد. مقـدار C_{ba} برابر است با :



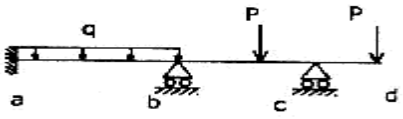
1) C_{ba} =0/8250

2) C_{ba} =0/5000

3) C_{ba} =0/3688

4) C_{ba} =0/3255

۲۷- در تحلیل تیر روبرو ضریب سختی bc را .....



1) می توان اصالح نمود مشروط بر آنکه لنگر نیروهای P در b منظور شود.

2) می توان اصلاح نمود و نیازی به انتقال مستقیم لنگر نیروهای P نمی باشد.

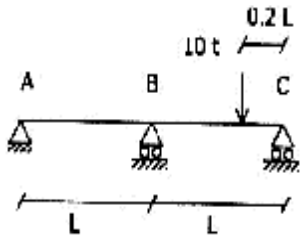
3) می توان اصلاح نمود مشروط بر اینکه به جای ضریب $\frac{3}{4}$ از عدد $\frac{3}{2}$ استفاده نمود.

4) نمی توان اصلاح نمود.

saze118.com

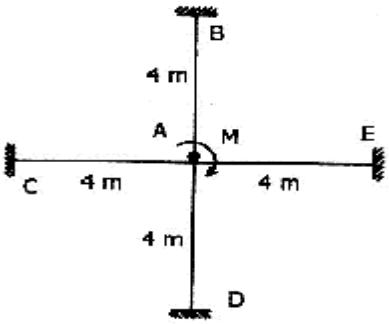
SAZE118.COM

۲۸- در تیر شکل زیر E، L ثابت هستند، در صورتی که L=۴m باشد، قدر مطلق لنگر در تکیه گاه B چند تن متر(t.m) است؟



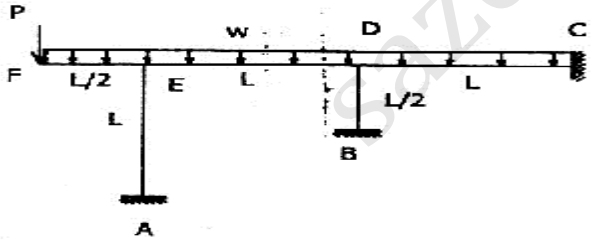
1) 2
2) 4
3) 92/1
4) 3/84

۲۹- در شکل زیر مقدار $M_{D۴}$ چقدر است؟



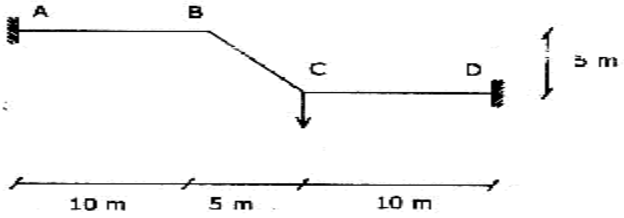
1) $\frac{M}{8}$
2) $\frac{M}{6}$
3) $\frac{M}{4}$
4) $\frac{M}{2}$

۳۰ مقدار لنگر تکیه گاه B با کدام رابطه برابر است؟



1) $\frac{2EIq_DWP}{L^2}$
2) $\frac{2EIq_BW}{L}$
3) $\frac{4EIq_B}{L^2}$
4) $\frac{4EIq_D}{L^2}$

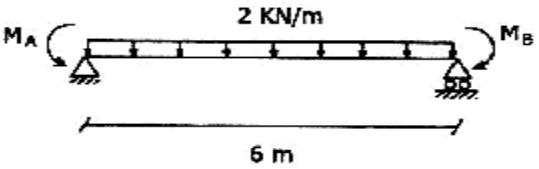
۳۱- تعداد مجهولات در روش شیب ـ افت برای حل قاب شکل مقابل را مشخص کنید.



1) 2 عدد
2) 3 عدد
3) 4عدد
4) 5 عدد

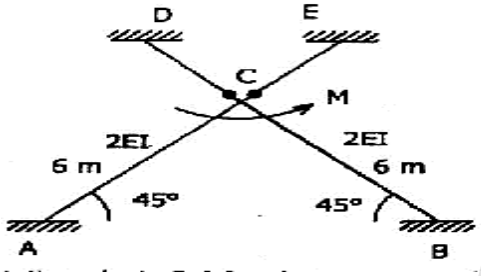
SAZE118.COM

۳۲- در صورتی که شیب در نقاط A و B صفر شوند، مقادیر M_A و M_B کدام است؟ (برحسب KN.m)



1) $M_A = M_B = 6$
2) $M_A = M_B = 3$
3) $M_A = 6, M_B = 3$
4) $M_A = 3, M_B = 6$

۳۳- در سازه شکل زیر، چنانچه مقدار طول و EI در اعضای DC و CE نصف اعضای AC و CB باشد، لنگر انتهایی M_{BC} کدام است؟



1) $\frac{M}{2}$
2) $\frac{M}{3}$
3) $\frac{M}{4}$
4) $\frac{M}{6}$

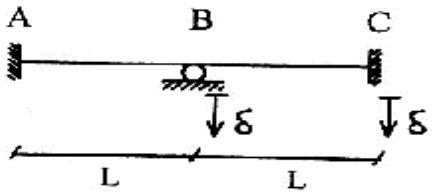
۳۴- اگر تکیه گاه A به اندازه ۲cm و تکیه گاه B به اندازه ۱cm نشست کند، در این صورت مقدار M_A کدام است؟

1) $\frac{EI}{L^2}$
2) $\frac{2EI}{L^2}$
3) $\frac{3EI}{L^2}$
4) $\frac{6EI}{L^2}$

saze118.com

SAZE118.COM

۳۵- در تیر ممتد شکل مقابل با صلبیت خمشی ثابت EI، تحت نشست های تکیه گـاهی ن داده شـده، M_{AB} کدام است؟



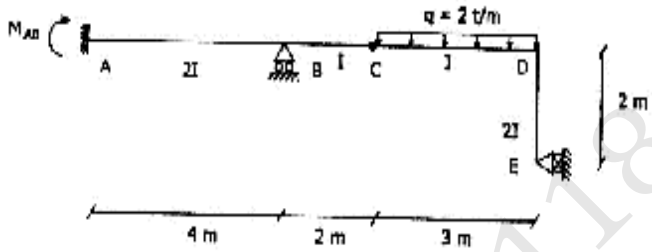
1) $\frac{3EId}{L^2}$

2) $\frac{6EId}{L^2}$

3) $\frac{7/5EId}{L^2}$

4) $\frac{4/5EId}{L^2}$

۳۶- میزان M_{AB} بر حسب t.m چقدر است؟



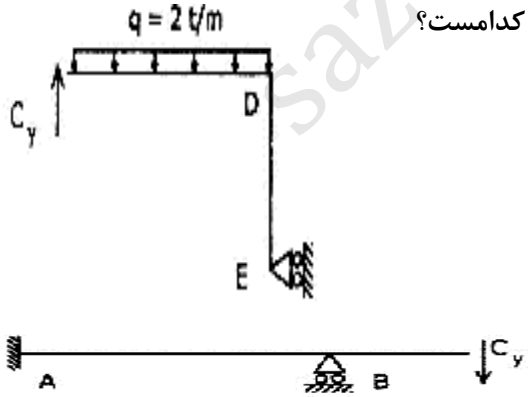
1) 12

2) 6

3) 4/5

4) -3

۳۷- در تیر مقابل ممان در فنر پیچشی تکیه گاه B کدامست؟



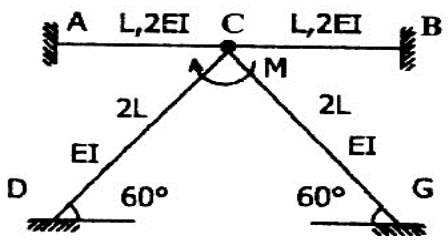
1) $\frac{PL}{12}$

2) $\frac{PL}{16}$

3) $\frac{PL}{24}$

4) $\frac{PL}{8}$

۳۸- در سازه شکل زیر لنگر M_{DC} و M_{AC} چقدر خواهد شد؟



1) $\frac{M}{4}$ و صفر

2) $\frac{M}{4}, \frac{M}{3}$

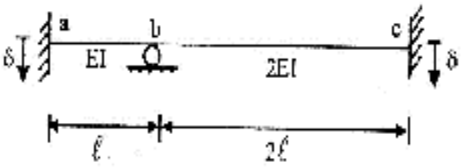
3) $\frac{M}{2}$ و صفر

4) $\frac{M}{2}, \frac{M}{6}$

saze118.com

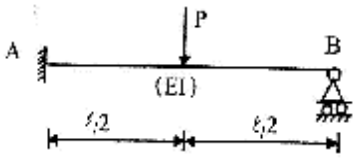
SAZE118.COM

۳۹- در تیر شکل زیر تحت نشست های تکیه گاهی نشان داده شده M_{ab} کدام است؟



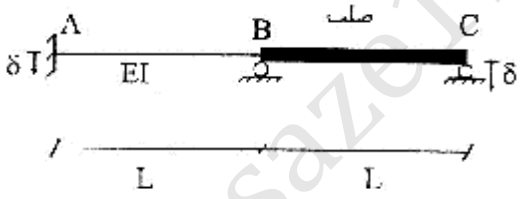
1) $3\frac{EId}{l^2}$
2) $6\frac{EId}{l^2}$
3) $3/75\frac{EId}{l^2}$
4) $5/25\frac{EId}{l^2}$

۴۰- تکیه گاه B به اندازه ۱cm نشست می کند؛ M_A را حساب کنید.



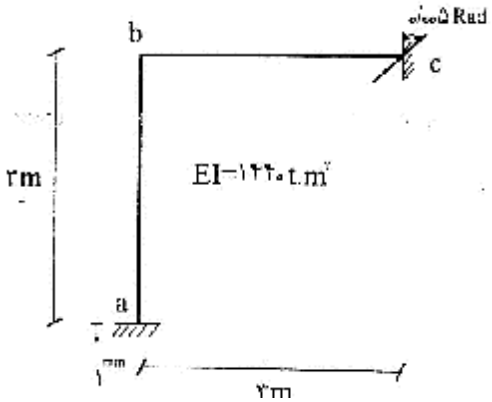
1) $M_A=-\frac{pl}{8}-\frac{3EI}{l^2}$
2) $M_A=-\frac{3pl}{16}-\frac{6EI}{l^2}$
3) $M_A=-\frac{3pl}{16}-\frac{3EI}{l^2}$
4) $M_A=-\frac{pl}{8}-\frac{6EI}{l^2}$

۴۱- در تیر شکل مقابل تحت نشست های تکیه گاهی نشان داده شده ، M_{AB} چقدر است؟



1) $\frac{\Delta EId}{L^2}$
2) $\frac{6EId}{L^2}$
3) $\frac{4EId}{L^2}$
4) $\frac{3EId}{L^2}$

۴۲ـ در قاب شکل مقابل تحت نشست در تکیه گاه a و دوران در تکیه گاه C، M_{Cb} بـر حسـب kg.m چقـدر است؟ (از تغییر شکل های محوری و برشی صرفنظر می گردد)

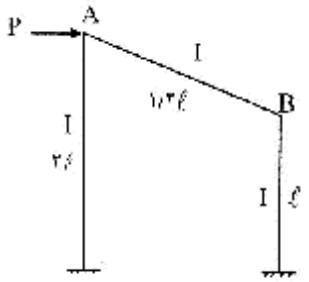


1) 8160
2) 8640
3) 9120
4) 10560

saze118.com

سنجش دانش

۴۳- در قاب شکل مقابل، چنانچه q_A و q_B معلوم باشند، در مورد تعیین M_{AB} کدام درست است؟



1) با نوشتن معادله شیب ـ افت بدست می آید.

2) بدون محاسبه Δ (تغییر مکان جانبی) نمی توان M_{AB} را بدست آورد.

3) با داشتن q_A و q_B برش پای ستون ها را باید حساب کرد و سپس لنگر M_{AB} را بدست آورید.

4) ابتدا باید معادلات شیب ـ افت را برای ستون ها نوشت سپس از معادلات تعادل M_{AB} را محاسبه نمود.

saze118.com

SAZE118.COM

پاسخ تشریحی تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱- گزینه «۴»

با استفاده از روابط شیب – افت سازه را تحلیل می‌کنیم.

رابطه تعادل در B: $M_{BA}+M_{BC}=0 \qquad (1):$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{12}(2\theta_B+\theta_A-0)+0\xrightarrow{\theta_A=-\theta_B}M_{BA}=\frac{EI\theta_B}{6} \qquad (2)$$

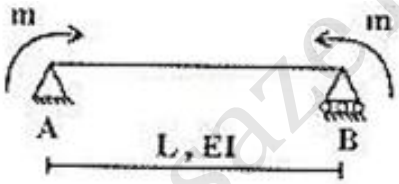
$$M_{BC}=\frac{2EI}{16}(2\theta_B+\theta_C-0)-\frac{1/2(16)^2}{12}\xrightarrow{\theta_B=-\theta_C}M_{BC}=\frac{EI\theta_B}{8}-25/6 \qquad (3)$$

$$1,2,3\Rightarrow \frac{EI\theta_B}{6}+\frac{EI\theta_B}{8}-25/6=\frac{7EI\theta_B}{24}-25/6=.$$

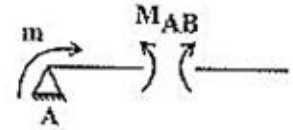
$$\theta_B=\frac{24(25/6)}{7EI}=\frac{87/8}{EI}$$

۲- گزینه «۴»

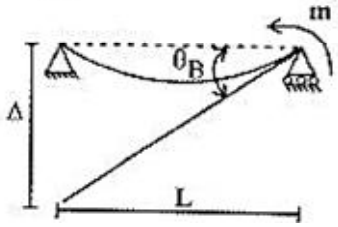
با استفاده از روابط شیب – افت خواهیم داشت: (بنا به تقارن $\theta_A=-\theta_B$)



$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}(2\theta_A+\theta_B-0)+0=\frac{2EI\theta_A}{L}$$



رابطه تعادل در A: $m+M_{AB}=0\Rightarrow m+\frac{2EI\theta_A}{L}=0\Rightarrow \theta_A=\frac{mL}{2EI}$



$$\theta_B=-\frac{mL}{2EI}$$

$$\theta_B=\frac{\Delta}{L}\Rightarrow \Delta=\theta_B L=-\frac{mL^2}{2EI}$$

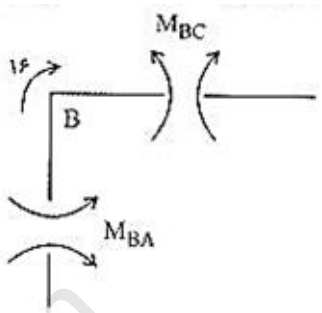
۳- گزینه «۲»

برای آن‌که انرژی ذخیره شده، با بیش‌ترین مقدار باشد، باید سازه دارای بیش‌ترین تغییر مکان باشد. لذا از آنجا که هر چه سختی فنر کم‌تر باشد، تغییر مکان بیش‌تری خواهد داشت. گزینه «2» پاسخ صحیح خواهد بود.

SAZE118.COM

۴- گزینه «۳»

با استفاده از روابط شیب – افت خواهیم داشت:



$$M_{AB}=2E(3)(0+\theta_B-0)-\frac{8(20)}{8}=6E\theta_B-20$$

$$M_{BA}=2E(3)(2\theta_B+0-0)+\frac{8(20)}{8}=12E\theta_B+20$$

$$M_{BC}=2E(2)(2\theta_B+\theta_C-0)+0=8E\theta_B+4E\theta_C$$

$$=2E(2)(2\theta_C+\theta_B-0)+0=8E\theta_C+4E\theta_B M_{CB}$$

در تکیه‌گاه C: $M_{CB}=0\Rightarrow 8E\theta_C+4E\theta_B=0\Rightarrow \theta_C=-\frac{\theta_B}{2}$ (1)

رابطه تعادل در B: $M_{BA}+M_{BC}-16=0$

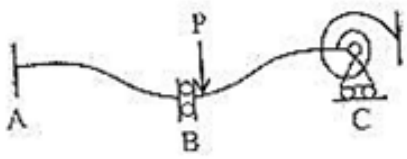
$$(1)\Rightarrow M_{BC}=8E\theta_B+3E(-\frac{\theta_B}{2})=6E\theta_B$$

$$(2)\Rightarrow 12E\theta_B+20+6E\theta_B-16=0\Rightarrow 18E\Theta_B=-4\Rightarrow \theta_B=-\frac{2}{9E}$$

$$M_{AB}=6E(-\frac{2}{9E})-20=-21/33kN.m$$

۵- گزینه «۴»

با استفاده از روش شیب – افت داریم:



$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}(0+0-\frac{3\Delta}{L})=-\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{L}(0+\theta_C-\frac{3\Delta}{L})=\frac{2EI\theta_C}{L}-\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$M_{BC}+M_{BA}=0$$

$$\frac{2EI\theta_c}{L}-\frac{6EI\Delta}{L^2}-\frac{6EI\Delta}{L^2}=0\Rightarrow \theta_c=\frac{6\Delta}{L}$$

$$M_{\text{فنر}}=k\theta=\frac{EI}{L}(\frac{6\Delta}{L})=\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$M_{\text{فنر}}+M_{BC}=PL\Rightarrow=\frac{6EI\Delta}{L^2}+\frac{2EI}{L}(\frac{6\Delta}{L}-\frac{3\Delta}{L})=PL$$

$$\Rightarrow\frac{12EI\Delta}{L^2}=PL\Rightarrow\frac{6EI\Delta}{L^2}=\frac{PL}{2}=M_{\text{فنر}}$$

saze118.cocm

SAZE118.COM

۶- گزینه «۱»

با حذف فنر و جایگزینی نیروی $F = K\Delta$ با آن و با استفاده از [illegible] شکل 1-4 خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{(28 - k\Delta)L^3}{48EI}$$

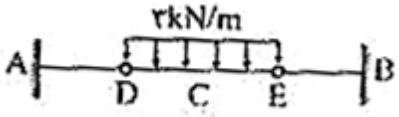
$$\Delta = \frac{(28 - 200\Delta)6^3}{48 \times 5400} \Rightarrow \Delta = 0/02$$

$$F = K\Delta = 200 \times 0/02 = 4ton$$

۷- گزینه «۳»

با استفاده از روابط جدول 1-4 داریم:

$$\text{DE قطعه } \Delta_C = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \times 3 \times 2^4}{384EI} = \frac{0/625}{EI}$$

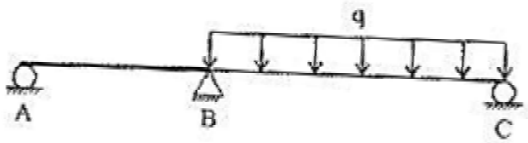


$$\text{BE قطعه } \Delta_E = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(3 \times 2 \times \frac{1}{2}) \times 1^3}{3EI} = \frac{1}{EI}$$

$$\text{کل } \Delta_C = \frac{0/625}{EI} + \frac{1}{EI} = \frac{1/625}{EI}$$

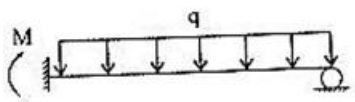
۸- گزینه «۴»

از آنجا که شیب در گره B برابر صفر می‌باشد، می‌توان آن‌را با تکیه‌گاه گیردار جایگزین نمود.



از جدول 1-4 داریم:

$$M = \frac{qL^2}{8}$$

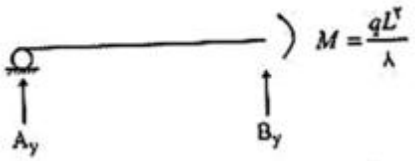


با توجه به صلب بودن تیر AB، تمام لنگر به آن منتقل خواهد شد. پس بنا به شکل دارمی:

saze118.com

SAZE118.COM

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y = \frac{M}{L} = \frac{\frac{qL^2}{8}}{L} = \frac{dL}{8}$$



۹- گزینه «۳»

فرض می‌کنیم در اثر نشست تکیه‌گاه C به اندازه δ برش V در تیر به‌وجود می‌آید با توجه به صلب بودن BC، تکیه‌گاه B هم به اندازه δ نشست می‌کند پس:

$$\delta = \frac{VL^3}{3EI} \Rightarrow V = \frac{3EI\delta}{L^3} \Rightarrow M_B = V \times I = \frac{3EI\delta}{L^2}$$

۱۰- گزینه «۱»

با توجه به صلب بودن قطعه‌ی BC$(EI = \infty)$ بنابراین لنگر قسمت کنسولی $\frac{\omega\alpha^2}{2}$ تماماً به انتهای B از تیر BC منتقل می‌شود و انتهای B ستون BD سهمی نخواهد بود.

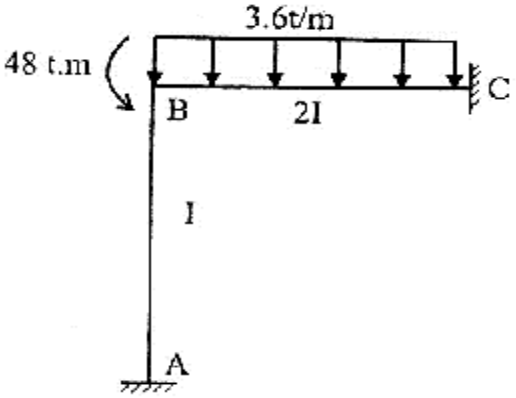
11- گزینه «1»

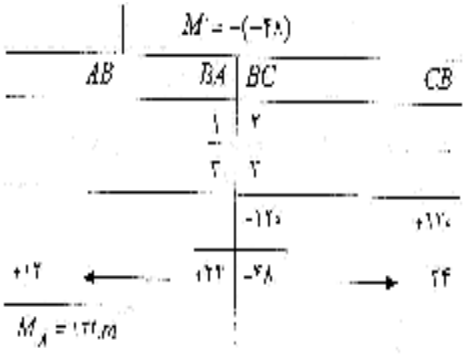
با توجه به تقارن سازه و بارگذاری آن، نقطه C چرخشی نخواهد داشت و $\theta_C = 0$

12ـ گزینه (1) صحیح است. از هر دو روش شیب ـ افت و پخش لنگر قابل حل است ولی به نظر می رسد پخش لنگر سریعتر باشد لنگرهای همانند لنگر 48t.m که به طور متمرکز به گره وارد می شوند را با علامت منفی در تعادل گره اثر می دهیم چرا که در پایان $M_{BA}+M_{BC}$ باید لنگر 48t.m را خنثی کنند.

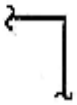
$$D_{BA} = \frac{1}{3}, D_{BC} = \frac{2}{3}$$

SAZE118.COM





13ـ گزینه (2) صحیح است. سازه در دو جهت متقارن است. بنابراین از سختی اصلاح شده استفاده می کنیم .



تقارن	BC	BA	تقارن
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
	0	+24	
	-16	-8	
	-16	+16	

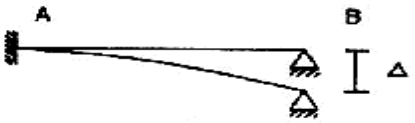
همانطور که مشاهده می شود M_B ⟵ ۱۶ ⟶ منفی می باشد.

توجه : مبنا سنجش منفی و مثبت بودن ممان، جهت های قراردادی اولیه یعنی ⟵ ⟶ می باشد علامت واقعی ممان هم علامت ممان سمت راست گره، M_{BC}، می باشد.

saze118.com

SAZE118.COM

14ـ گزینه (1) صحیح است. از روابط شیب افت استفاده می کنیم.

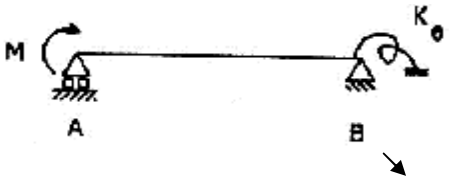


$$M_{BA}=0\Rightarrow\frac{2EI}{L}\left(2q_B-\frac{3\Delta}{L}\right)=0\Rightarrow q_B=\frac{3}{2}\frac{\Delta}{L}$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(q_B-\frac{3\Delta}{L}\right)=\frac{2EI}{L}\left[\frac{3}{2}\frac{\Delta}{L}-3\frac{\Delta}{L}\right]=-\frac{3EI\Delta}{L^2}$$

15ـ گزینه (1) صحیح است. فنر را تیری با $K'=\frac{6EI}{L}$ در نظر می گیریم.

توجه کنید که سختی BA را باید اصلاح شده بگیریم



فنر D

$$K'_{BA}=\frac{4EI}{L}\times\frac{3}{4}=\frac{3EI}{L}\Rightarrow D_{BA}=1/3, D=2/3$$

بنابراین ممان فنر برابر $\frac{M}{3}$ خواهد بود.

AB	BA	فنر
	1/3	2/3
-M		
+M		
	$+\frac{M}{2}$	
	$-\frac{M}{6}$	$-\frac{M}{3}$

16- گزینه (3) صحیح است. ابتدا ممانهای گیرداری در نقطه B را حساب می کنیم.

$$M_{BD}^F=\frac{48\times8}{8}=-48\quad M_{BA}^F=\frac{4\times12^2}{12}=48$$

همانطور که می بینیم ممان های گیرداری یکدیگر را در B خنثی می کنند. پس گره B هیچ چرخشی ندارد.

نکته : در محاسبه M_{BA}^F ، چه بار را روی تیر تصویر کرده و بر تیر عمود کنیم و M_{BA}^F را حساب کنیم و چه تیـر را روی بار تصویر کنیم، در هر دو حالت M_{BA}^F بدست آمده یکی خواهد بود. امتحان کنید.

saze118.com

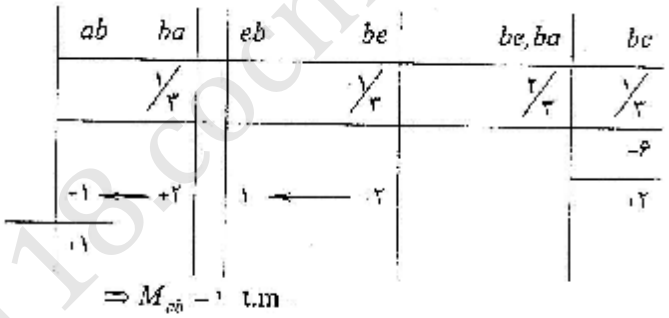
SAZE118.COM

17- گزینه (1) صحیح است. به دلیل وجود میله صلب $q_B = -\frac{d}{L}$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left[q_B - \frac{3\Delta}{L}\right] = \frac{2EI}{L}\left[-\frac{d}{L} - \frac{3d}{L}\right] = -\frac{8EId}{L^2}$$

18- گزینه (4) صحیح است. در جمع کردن سختی ها در گره b باید سختی bc در $\frac{1}{2}$ به دلیل تقارن ضرب شود.

$$\left.\begin{aligned} K_{ba} &= \frac{I}{4} \\ K_{be} &= \frac{\frac{3}{4}I}{3} = \frac{I}{4} \\ K_{bc} &= \frac{1}{2}\times\frac{3I}{6} = \frac{I}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} D_{ba} &= 1/3 \\ D_{be} &= 1/3 \\ D_{bc} &= 1/3 \end{aligned}\right.$$

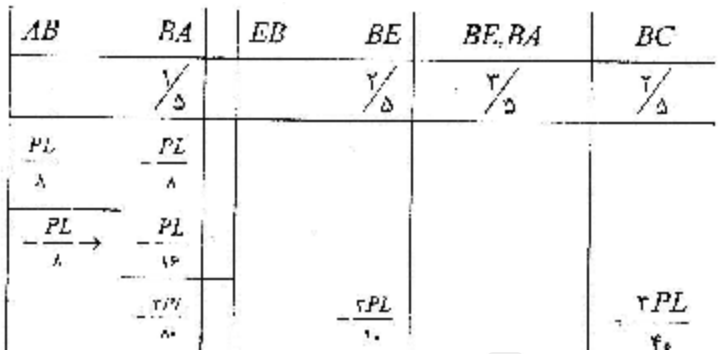


19ـ گزینه (2) صحیح است حل همانند حل مسأله سوم می باشد.

$$M_{BA} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{L}\left(2q_B - \frac{3\Delta}{L}\right) = 0 \Rightarrow q_B = \frac{3\Delta}{2L}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{2L}\left(q_B - 3\frac{8}{L}\right) = 2\frac{EI}{L}\left(\frac{3\Delta}{2L} - \frac{3\Delta}{L}\right) = -\frac{3IE\Delta}{L^2} = -\frac{3EI}{1^2}\times\frac{3}{EI} = -9$$

20- گزینه (2) صحیح است. سختی BC را به دلیل پادتقارن و سختیBA را به دلیل تکیه گاه مفصلی اصلاح می کنیم



$$\left.\begin{aligned} K_{BC} &= \frac{3}{2}\times\frac{I}{L} \\ K_{BA} &= \frac{3}{4}\times\frac{I}{L} \\ K_{BF} &= \frac{I}{\frac{2}{3}L} = \frac{3}{2}\frac{I}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} D_{BC} &= \frac{2}{5} \\ D_{BA} &= \frac{1}{5} \\ D_{BF} &= \frac{2}{5} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow M_{BA} = -\frac{3PL}{16} + \frac{3PL}{80} = -\frac{3PL}{20}$$

SAZE118.COM

21- گزینه (1) صحیح است.

همانطور که گفته شد سختی عضو صلب را ∞ می گیریم. بنابراین برای ضریب توزیع خواهیم داشت.

$D_{BC}=1, D_{BD}=0$ و بنابراین تمام ممان را قسمت BC تحمل خواهد کرد.

22- گزینه (4) صحیح است.

در سازه متقارن نمودار ممان متقارن و نمودار برش پادمتقارن است.

با توجه به تقارن $q_B=0$ می باشد بنابراین علامت ممانها را با روش شیب ـ فت کنترل می کنیم.

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(-\frac{3\Delta}{L}\right)=-\frac{6EI\Delta}{L^2}$$
$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left(-\frac{3\Delta}{L}\right)=-\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

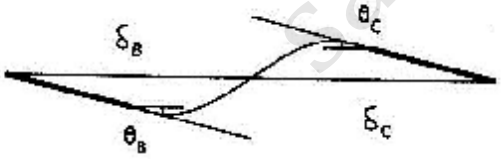
M_{AB} (⟵) M_{BA}

همانطور که دیده می شود M_{AB} در جهت مثبت قراردادی و M_{BA} در جهت منفی قراردادی می باشد.

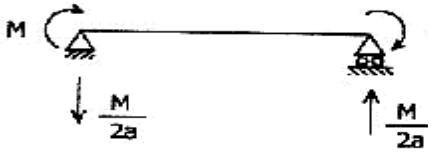
جهت مثبت ممان (⟵) $\Rightarrow M_{AB}=-\frac{6EI\Delta}{L^2}, M_{BA}=+\frac{6EI\Delta}{L^2}$

23- گزینه (3) صحیح است. با توجه به تقارن خواهیم داشت:

$q_B=q_C, d_B=d_C, d=aq$



برای قطعه BC روابط شیب افت را می نویسم. ابتدا ممان را در B بدست می آوریم.



$$\Rightarrow M_B=M-\frac{M}{2a}\times a=\frac{M}{2}$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{L}\left[2q_B+q_C-\frac{3\Delta}{L}\right]=\frac{2EI}{2a}\left[2q+q-\frac{3\times(-2d)}{2a}\right]=\frac{EI}{a}\left[3q+\frac{3\times aq}{a}\right]=\frac{6EIq}{a}$$

$$\Rightarrow q=\frac{Ma}{12EI}$$

SAZE118.COM

واضح است که فاصله m و n برابر $4\,aq$ می باشد.

$$\Delta = 2aq = \frac{Ma^2}{3EI}$$

24- گزینه (3) صحیح است. تغییر شکل محوری را با نیروی محوری اشتباه نگیرید!

25- گزینه (4) صحیح است. سختی BC و BA را باید اصلاح کنیم.

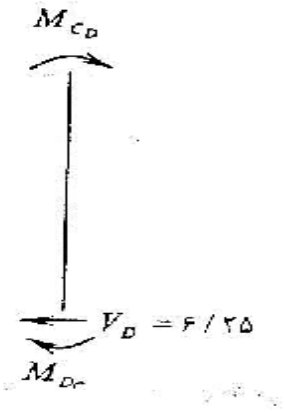
$$K_{BD} = \frac{4I}{4} = I \quad K_{BE} = \frac{3I}{3} = I \quad K_{BA} = \frac{5I}{I} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} I \quad K_{BC} = \frac{6I}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} I$$

بنابراین خواهیم داشت $D_{BA} = \frac{0/75}{3/5}$

$$\Rightarrow M_{BA} = 140 \times \frac{0/75}{3/5} = 30KN.m \Rightarrow R_A = \frac{M_{BA}}{5} = 6KN$$

26- گزینه صحیح موجود نمی باشد. چون سازه متقارن است در شکل زیر $V_D = 6/25$ خواهد بود. خواهیم داشت

$$q_b = q_c$$



$$V_D \times 10 + M_{DC} + M_{CD} = 0 \Rightarrow 62/5 + \frac{2EI}{10}\left[q - \frac{3\Delta}{10}\right] + \frac{2EI}{10}\left[2q - \frac{3\Delta}{10}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{6EI}{10} q - \frac{12EI}{100}\Delta = -62/5 \qquad I$$

$$M_{CD} + M_{Cb} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{10}\left[2q - \frac{3\Delta}{10}\right] + \frac{2E \times 2I}{10}[2q + q] = 0$$

$$\Rightarrow 8q - \frac{3\Delta}{10} = 0 \qquad II$$

$$I, II \Rightarrow q = \frac{24/04}{EI}, \Delta = \frac{641/03}{EI} \Rightarrow M_{ab} = 13/65$$

که این عدد در گزینه ها موجود نمی باشد.

27- گزینه (3) صحیح است. در این سؤال، S همان K' می باشد.

$$S_{ab}C_{ab} = S_{ba}C_{ba} \Rightarrow 5/41 \times 0/675 = 9/9 \times C_{ba} \Rightarrow C_{ba} = 0/3688$$

28- گزینه (1) صحیح است. اگر قسمت CD را حذف کرده و ممان این قسمت را در b قرار دهیم می توان سختی را اصلاح نمود.

29- گزینه (3) صحیح است.

SAZE118.COM

$$M_{BC}^{F}=-\frac{10\times 3/2\times 0/8^2}{4^2}=-1/28 \quad M_{BC}^{F}=-\frac{10\times 0/8\times 3/2^2}{4^2}=+5/12$$

$$\Rightarrow M_b=1/92$$

AB	BA	BC	CB
	0/5	0/5	
		-1/28	+5/12
		-2/56	-5/12
	+1/92	+1/92	
	+1/92	-1/92	

30- گزینه (2) صحیح است. تیر AD به دلیل اینکه در انتهای A مفصل است، هیچ ممانی از مجموعه تحمل نمی کند.

به دلیل مساوی بودن $\frac{I}{L}$ برای سه میله گرد داریم :

$$M_{AD}=\frac{M}{3}\Rightarrow M_{DA}=\frac{1}{2}M_{AD}=\frac{M}{6}$$

31- گزینه (4) صحیح است.

$$M_{BA}=\frac{2EI}{L/2}[q_D]=\frac{4EIq_D}{L}$$

البته بقیه گزینه ها از نظر دیمانسیون نیز اشتباه می باشند.

32- گزینه (2) صحیح است.

$$\Delta_V B=\Delta_V C=?, q_C=?, q_B=?$$

33- گزینه (1) صحیح است. جواب واضح است:

$$M_A=M_{AB}^{F}=M_B=M_{BA}^{F}=\frac{WL^2}{12}=\frac{2\times 6^2}{12}=6KN.m$$

34- گزینه (3) صحیح است. تیرهای CD و CE به دلیل مفصل بودن در انتهای C سهم ممانی نمی برند و ممان به دلیل برابر بودن سختی تیرهای CA و CB به نسبت مساوی بین این دو تقسیم می گردد.

$$\Rightarrow M_{CB}=\frac{M}{2}\Rightarrow M_{BC}=\frac{1}{2}M_{CB}=\frac{M}{4}$$

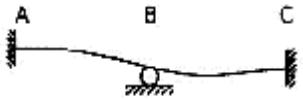
35- گزینه (3) صحیح است. اختلاف Δ برای دو سر برابر 1 cm می باشد.

$$M_{BA}=0\Rightarrow \frac{2EI}{L}\left(2q-\frac{3\Delta}{L}\right)=0\Rightarrow q_B=+\frac{3\times(-1)}{2_L}=-\frac{3}{2L}$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(q-\frac{3\Delta}{L}\right)=\frac{2EI}{L}\left[-\frac{3}{2L}+\frac{3}{L}\right]=\frac{3EI}{L^2}$$

SAZE118.COM

36ـ گزینه (4) صحیح است. در واقع مانند انیست که تکیه گاه A به اندازه dبالا رود.



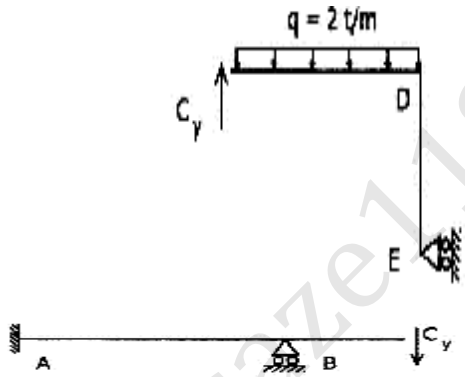
$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}\left[2q_B-\frac{3d}{L}\right], M_{BC}=\frac{2EI}{L}[2q_B]$$

$$M_{BA}+M_{BC}=0\Rightarrow 4q_B=\frac{3d}{L}\Rightarrow q_B=\frac{3}{4}\frac{d}{L}$$

$$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left[q_B-\frac{3\Delta}{L}\right]=\frac{2EI}{L}\left[\frac{3}{4}\frac{d}{L}-\frac{3d}{L}\right]=\frac{-4/5EId}{L^2}$$

37ـ گزینه (2) صحیح است. دیاگرام آزاد سازه را می کشیم تا M_{BA} را بدست آوریم.

$$\sum F_Y=0\Rightarrow C_Y=2\times 3=6$$
$$M_{BA}=M_{BC}=2\times C_Y=12t.m$$
$$\Rightarrow M_{AB}=\tfrac{1}{2}M_{BA}=\frac{12}{2}=6t.m$$



38- گزینه (3) صحیح است. فنر پیچشی را یک عضو با سختی $k'=\frac{2EI}{L}$ می گیریم .

$$k'_{BA}=\frac{4EI}{L}$$
$$\Rightarrow D_{BA}=\frac{2}{3}, D_q=\frac{1}{3}$$

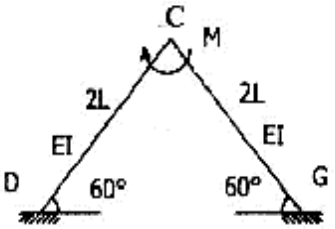
AB	BA	فنر	
$-\frac{PL}{8}$	$\frac{PL}{8}$		لنگر ـ گیرداری
$-\frac{PL}{24}$	$\leftarrow -\frac{PL}{12}$	$-\frac{PL}{24}$	آزاد کردن گره B
$\frac{PL}{6}$	$\frac{PL}{24}$	$-\frac{PL}{24}$	$\sum M$

39- گزینه (1) صحیح است. دو تیرAC و BC از ممان M هیچ سهمی نمی برد زیرا حول C آزادی چرخش دارند حال باید مسأله روبرو را حل کنیم.

SAZE118.COM

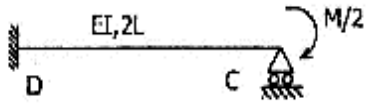
گره C فقط آزادی چرخش دارد و به دلیل تقارن $\frac{M}{2}$ به تیر DC و $\frac{M}{2}$ به تیرCG می رسد.

بنابراین مسأله یک مرحله دیگر ساده شده و به مسأله زیر تبدیل می شود.



در شکل مقابل، برای M_{DC} خواهیم داشت:

$$M_{DC}=\frac{M}{4}$$



40- گزینه (4) صحیح است.

$$M_{ba}=\frac{2EI}{L}\left[2q_b-3\left(-\frac{d}{L}\right)\right]=\frac{2EI}{L}\left[2q_b+\frac{3d}{L}\right]$$

$$M_{bc}=\frac{2(2EI)}{2L}\left[2q_b-3\left(\frac{d}{L}\right)\right]=\frac{2EI}{L}+\left[2q_b-\frac{3d}{L}\right]$$

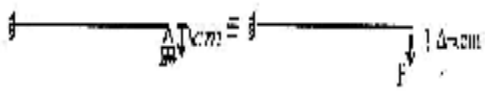
$$M_{ba}+M_{bc}=0\Rightarrow 4q_b+\frac{3d}{2L}=0\Rightarrow q_b=-\frac{3d}{8L}$$

$$M_{ab}=\frac{2EI}{L}\left[q_b-3\left(-\frac{d}{L}\right)\right]=\frac{2EI}{L}\left[-\frac{3d}{8L}+\frac{3d}{L}\right]$$

$$\Rightarrow 5/25\frac{EId}{L^2}$$

41- گزینه (3) صحیح است. ابتدا اثر بار P را حساب کرده و سپس اثر نشست تکیه گاهی

	AB	BA	
	$-\frac{PL}{8}$	$\frac{PL}{8}$	
	$-\frac{PL}{16}$	$-\frac{PL}{8}$	$\Rightarrow M_A=-\frac{3PL}{16}$
		0	
	$-\frac{3PL}{16}$		



$$\frac{FL^3}{3EI}=1\Rightarrow F=\frac{3EI}{L^3}$$

$$\Rightarrow M_A=-\frac{3EI}{L^2}$$

SAZE118.COM

$$\Rightarrow M_A^T = -\frac{3PL}{16} - \frac{3EI}{L^2}$$

42- گزینه (1) صحیح است.

$$q_B = \frac{d}{L}, \Delta_{AB} = -d$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left[2q_A + q_B - 3\frac{\Delta}{L}\right] = \frac{2EI}{L}\left[\frac{d}{L} - 3\left(\frac{-d}{L}\right)\right] = \frac{8EId}{L}$$

43- گزینه (1) صحیح است.

$$q_C = +0/005Rad, \Delta_{bc} = -1mm = -0/001m$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}[2q_b]$$

$$M_{bc} = \frac{2EI}{L}\left[2q_b + q_c - \frac{3\Delta}{L}\right] = \frac{2EI}{L}\left[2q_b + 0/005 + \frac{3\times 0/001}{3}\right] = \frac{2EI}{L}[2q_b + 0/006]$$

$$M_{ba} + M_{bc} = \mathbf{0} \Rightarrow 4q_b + 0/006 = \mathbf{0} \Rightarrow q_b = 0/0015Rad$$

$$M_{cb} = \frac{2EI}{L}\left[2q_c + q_b - \frac{3\Delta}{L}\right] = \frac{2\times 1440}{3}\left[2\times 0/003 + 0/0015 + \frac{3\times 0/001}{3}\right] = 8/16t.m = 8160kg.m$$

33ـ گزینه (1) صحیح است. توجه کنید که جابجایی افقی A a و B با هم برابر می باشد.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}[2q_A + q_B]$$

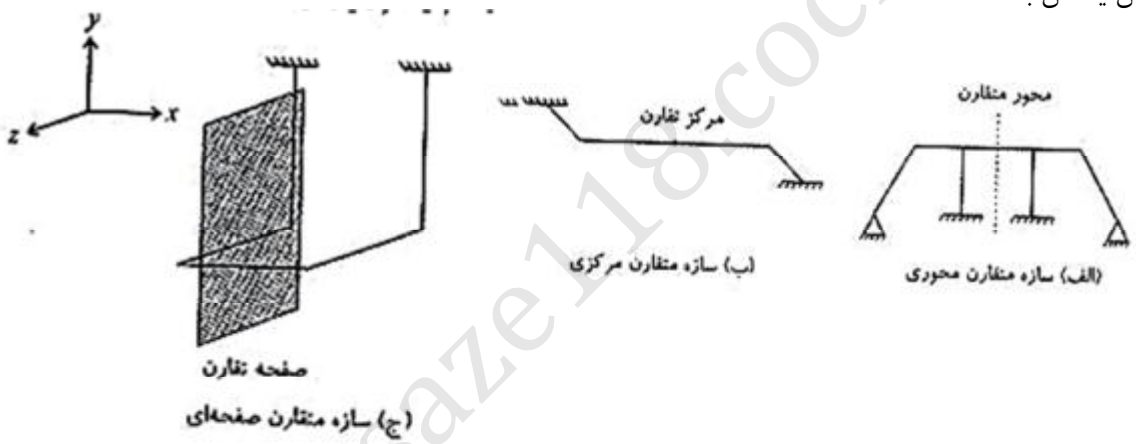
saze118.com

SAZE118.COM

فصل پنجم – تحلیل سازه‌های متقارن

استفاده از خاصیت تقارن در سازه‌های نامعین، تحلیل آن‌ها را بسیار ساده‌تر می‌نماید. زیرا باعث کاهش درجه نامعینی سازه می‌گردد. انواع سازه‌های متقارن عبارتند از: سازه‌های متقارن محوری (تقارن نسبت به یک محور) سازه‌ای متقارن مرکزی (تقارن نسبت به یک نقطه) و سازه‌های متقارن صفحه‌ای (تقارن نسبت به یک صفحه.)

منظور از تقارن سازه، تقارن در هندسه و شرایط تکیه‌گاهی و مصالح است. سازه متقارن محوری به سازه‌ای اطلاق می‌شود که دارای محور تقارن بوده و اعضای متقارن آن دارای خواص هندسی، الاستیک و تکیه‌گاهی یکسان باشند. سازه متقارن مرکزی، سازه‌ای است که دارای مرکز تقارن می‌باشد . همانند سازه متقارن محوری، اعضای متقارن آن دارای خواص یکسان باشند.



شکل 5-1 نمونه سازه‌های متقارن

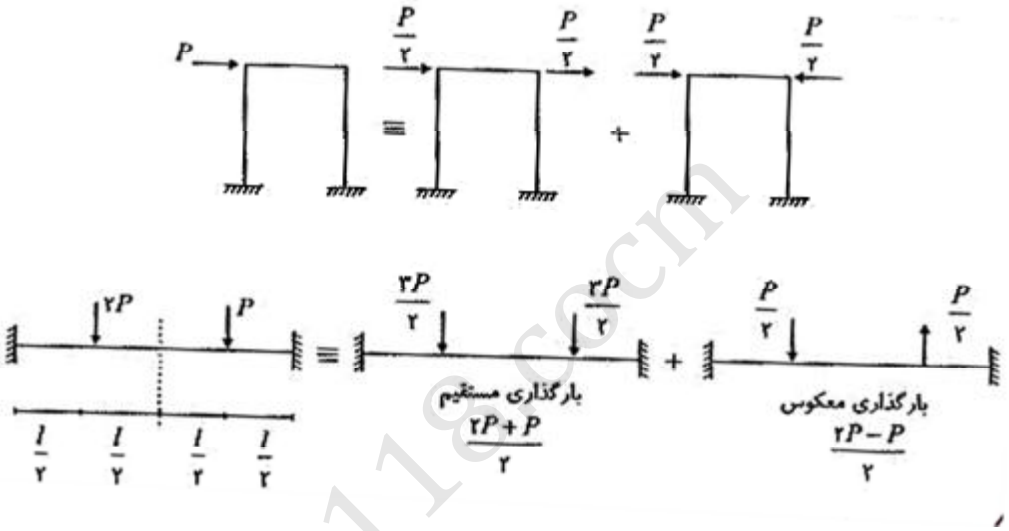
چون در تحلیل سازه‌ها، مطالعه سازه‌های صفحه‌ای مدنظر است پس فقط دو تقارن محوری و مرکزی را مورد توجه قرار می‌دهیم. در سازه‌های متقارن، می‌توان بارگذاری متقارن مستقیم و بارگذاری متقارن معکوس را اعمال نمود. در این حالتع به جای کل سازه، قسمتی از سازه (سازه معادل) را به یکی از روش‌های فصل قبل، تحلیل می‌کنیم.

شکل 5-2 نمونه بارگذاری متقارن

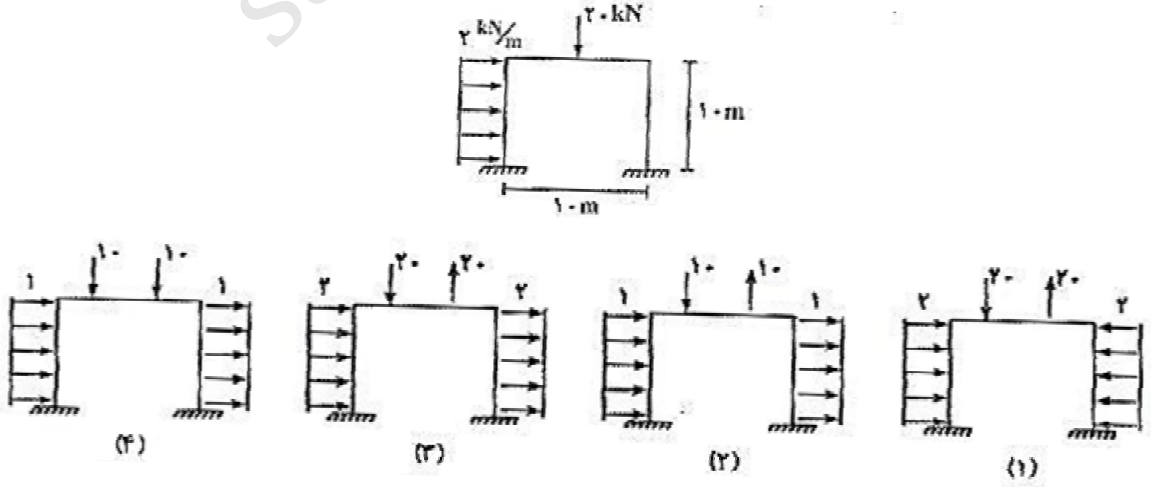
SAZE118.COM

* نکته 1: در حالت کلی هرگونه بارگذاری را می‌توان به یک بارگذاری متقارن مستقیم و یک بارگذاری متقارن معکوس تبدیل کرد، به‌طوری که بارگذاری مستقیم از نصف مجموعه بارگذاری به صورت مستقیم و بارگذاری معکوس از نصف تفاضل بار به صورت معکوس به‌دست می‌آیند.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:



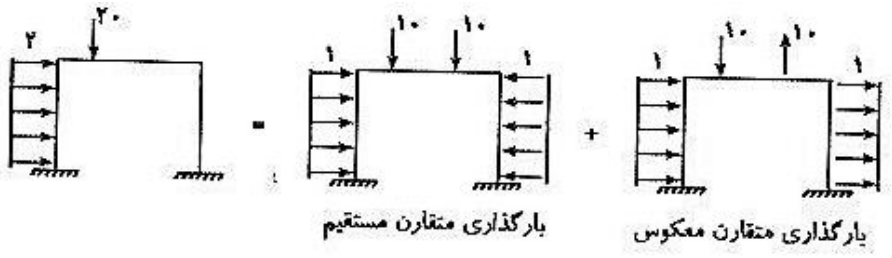
مثال ۱: اگر بخواهیم بارگذاری مقابل را به یک بارگذاری متقارن مستقیم و یک بارگذاری متقارن معکوس تبدیل کنیم، بارگذاری متقارن معکوس آن کدام است؟



حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به نکته 1، می‌توان برای بارگذاری فوقع مجموع بارگذاری‌های متقارن مستقیم و معکوس زیر را در نظر گرفت:

SAZE118.COM



قضیه اول تقارن:

در یک سازه متقارن، بارگذاری مستقیم، ایجاد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی و تغییر شکل‌های متقارن می‌کند و بالعکس، در یک سازه متقارن بارگذاری معکوس، ایجاد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی و تغییر شکل‌های پادمتقارن می‌کند.

قضیه دوم تقارن:

اگر در محل تقارن سازه، تغییر مکان از هر نوع (تغییر مکان قائم یا برشی، تغییر مکان افقی یا محوری و دوران) وجود داشته باشد، نیروی متناظر با آن (به ترتیب نیروی برشی، نیروی محوری و لنگر خمشی) در محل تقارن صفر است و بالعکس اگر در محل تقارن سازه تغییر مکان از هر نوع برابر صفر باشد، نیروی متناظر با آن در محل تقارن وجود خواهد داشت.

به عنوان مثال برای 2 سازه بالا داریم:

الف) $C:\begin{cases}\Delta_C=0 \rightarrow V_C\neq 0\\ \theta_C\neq 0 \rightarrow M_C=0\end{cases}$

ب) $C:\begin{cases}\Delta_C\neq 0 \rightarrow V_C=0\\ \theta_C=0 \rightarrow M_C\neq 0\end{cases}$

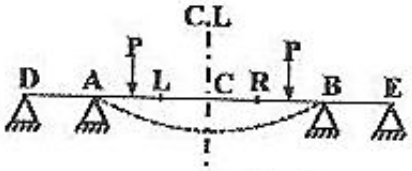
SAZE118.COM

5-1 خواص تقارن مستقیم

۵-۱-۱ سازه‌های متقارن محوری با بارگذاری متقارن مستقیم

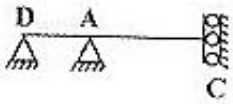
1) $\theta_L = -\theta_R$ 2) $y_L = y_R$ 3) $V_L = -V_R$ 4) $M_L = M_R$

الف) تعداد دهانه‌ها فرد باشد.



سازه اصلی

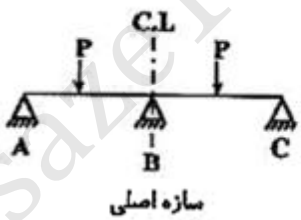
$$K_{AC} = \frac{1}{2} K_{AB}$$



سازه معادل

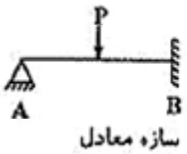
در این حالت، سختی عضو AC در سازه جایگزین، برابر نصف سختی دهانه AB در سازه اصلی است.

ب) تعدا دهانه‌ها زوج باشد:

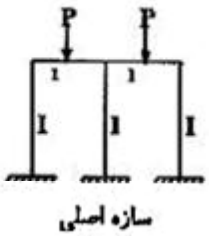


سازه اصلی

الف) تیرها

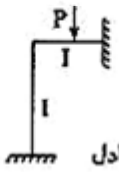


سازه معادل



سازه اصلی

ب) قابها

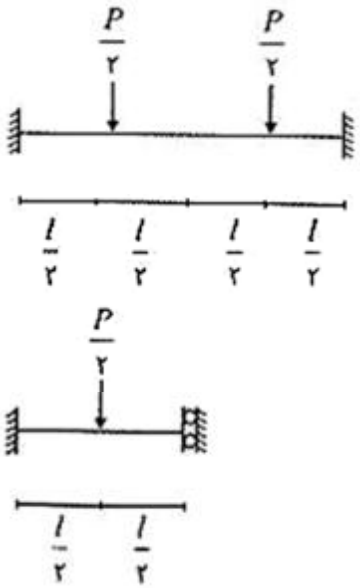


سازه معادل

در این حالت، شیب و تغییر مکان افقی (محوری) در محل تقارن سازه برابر صفر است.

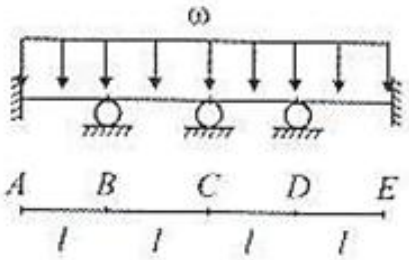
SAZE118.COM

اما تغییر مکان قائم در محل تقارن می‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین در محل تقارن و در این نوع بارگذاری برش برابر صفر است ولی لنگر و نیروی محوری می‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین برای تحلیل سازه، می‌توان سازه را از محل تقارن نصف کرد و تکیه‌گاهی در محل تقارن قرار داد که تغییر مکان برشی آن آزاد اما شیب و تغییر مکان محوری آن برابر صفر باشد. پس یک تکیه‌گاه غلتکی باید انتخاب کرد.



* نکته 2: اگر تغییر مکان قائم محل تقارن سازه در این نوع بارگذاری برابر صفر باشد، پس از نصف نمودن سازه تکیه‌گاه دوغلتکی تبدیل به تکیه‌گاه گیردار می‌گردد.

مثال ۲: لنگر تکیه‌گاه A و عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه B را در سازه زیر کدام است؟



1) $\frac{\omega l}{12}, \frac{\omega l^2}{2}$

2) $\frac{\omega l^2}{8}, \frac{\omega l}{2}$

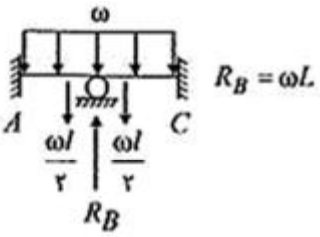
3) $\frac{\omega l^2}{12}, \frac{\omega l}{2}$

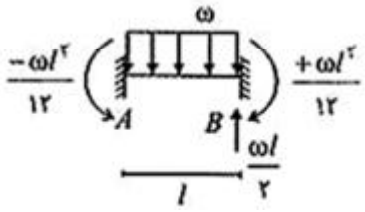
4) $\frac{\omega l}{8}, \frac{\omega l^2}{2}$

SAZE118.COM

حل:گزینه‌ی «۳» صحیح است.

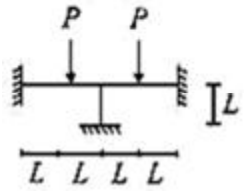
در این سازه نیاز به استفاده از 2 بار تقارن است.



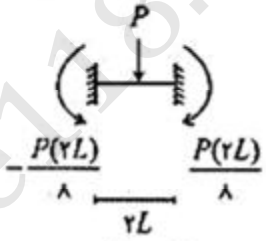


$$\begin{cases} M_A = \dfrac{\omega l^2}{12} \\ R_B = \dfrac{\omega l}{2} \end{cases}$$

* نکته 3: اگر در محل تقارن سازه یک ستون قرار گرفته باشد، با صرف‌نظر از تغییر شکل‌های محوری ستون می‌توان در محل تقارن سازه یک تکیه‌گاه گیردار قرار داد.



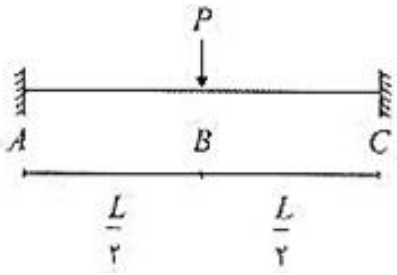
سازه اصلی



سازه معادل

* نکته 4: اگر یک بار متمرکز در محل تقارن سازه وجود داشته باشد پس از نصف نمودن سازه، بار متمرکز را نیز باید نصف نموده و برروی محل تقارن سازه قرار دهیم.

مثال ۳: تغییر مکان میانه تیر مقابل کدام است؟



1) $\dfrac{PL^3}{96EI}$

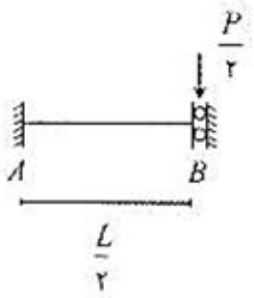
2) $\dfrac{PL^3}{192EI}$

3) $\dfrac{PL^3}{24EI}$

4) $\dfrac{PL^3}{12EI}$

SAZE118.COM

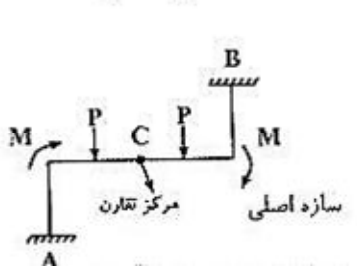
حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

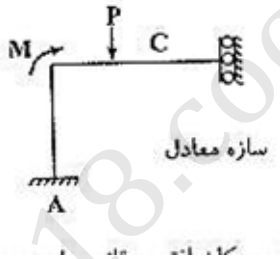


$$\Delta_B = \frac{(\frac{p}{2})(\frac{L}{2})^3}{12EI} = \frac{pL^3}{192EI}$$

۵-۱-۲ سازه‌های متقارن مرکزی با بارگذاری متقارن مستقیم

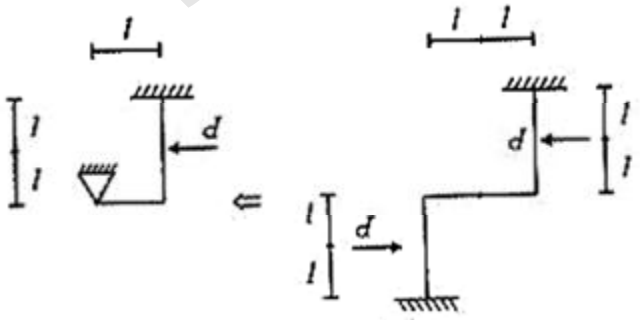
1) $\theta_L = -\theta_R$ 2) $y_L = y_R$ 3) $V_L = -V_R$ 4) $M_L = M_R$





در این نوع بارگذاری و در محل تقارن، تغییر مکان افقی و قائم برابر صفر است ولی دوران در محل تقارن آزاد است.

بنابراین پس از نصف نمودن سازه در محل تقارن، باید تکیه‌گاهی قرار داد که تغییر مکان محوری و قائم در آن صفر باشند و دوران در آن آزاد باشد یعنی باید در محل تقارن یک تکیه‌گاه مفصلی قرار داد.



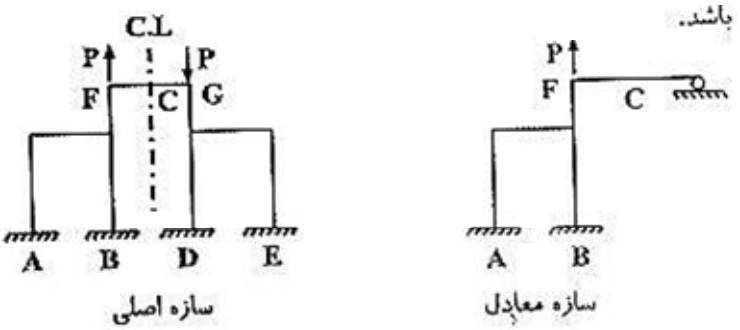
2-5 خواص تقارن معکوس

۵-۲-۱ سازه‌های متقارن محوری با بارگذاری متقارن معکوس:

1) $\theta_L = \theta_R$ 2) $y_L = -y_R$ 3) $V_L = V_R$ 4) $M_L = -M_R$

SAZE118.COM

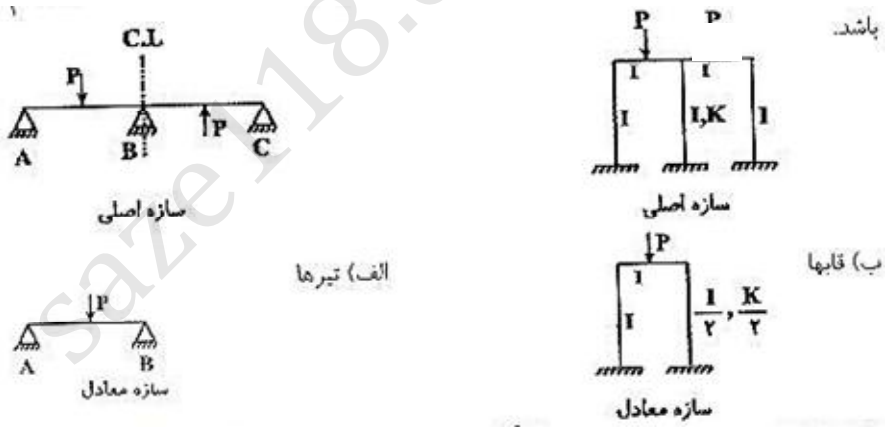
الف) تعداد دهانه‌ها فرد باشد.



در این حالت، سختی عضو FC در سازه جایگزین، 1/5 برابر سختی FG در سازه اصلی می‌باشد.

$$K_e = \frac{3}{2} K_{FG}$$

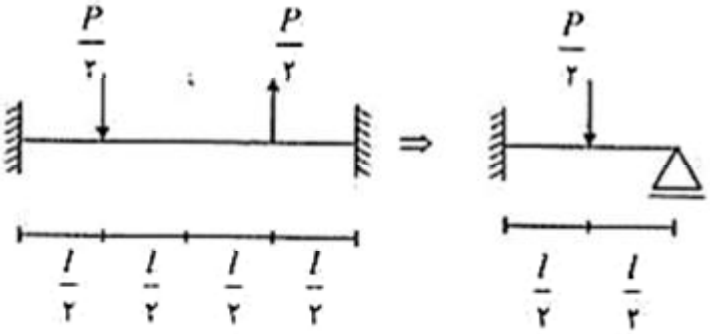
ب) تعداد دهانه‌ها زوج باشد.



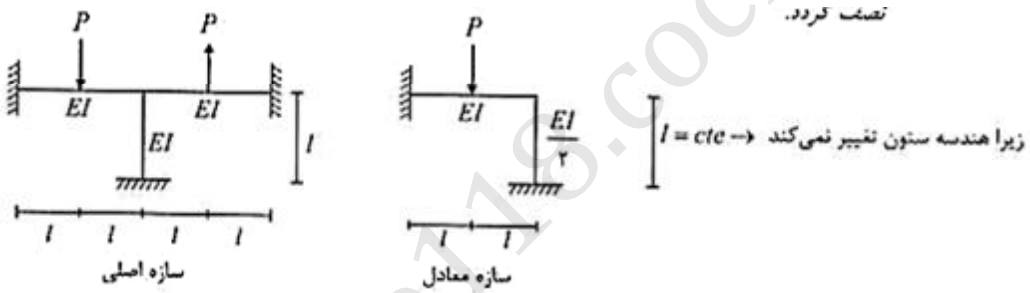
در این نوع بارگذاری و در محل تقارن، تغییر مکان قائم برابر صفر است. اما تغییر مکان محوری و دوران در محل تقارن سازه می‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین پس از نصف نمودن سازه باید تکیه‌گاهی قرار داد که نیروی محوری و لنگر خمشی در آن تکیه‌گاه برابر صفر باشد، اما نیروی برشی در آن وجود داشته باشد، یعنی در محل تقارن یک تکیه‌گاه غلتکی قرار می‌دهیم.

SAZE118.COM

که درجه نامعینی از سه درجه به یک درجه کاهش پیدا کرد.



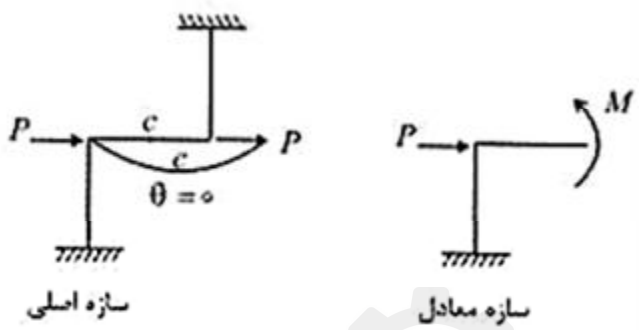
* نکته 5: اگر در محل تقارن سازه و در این نوع بارگذاری یک ستون وجود داشته باشد، علاوه بر نصف نمودن سازه باید سختی دورانی ستون را نیز نصف کرد، برای این که هندسه ستون تغییر نکند باید EI ستون نصف گردد.



۵-۲-۲ سازه‌های متقارن مرکزی با بارگذاری متقارن معکوس

در این نوع بارگذاری و در محل تقارن، تغییر مکان محوری و قائم آزاد است ولی دوران برابر صفر است.

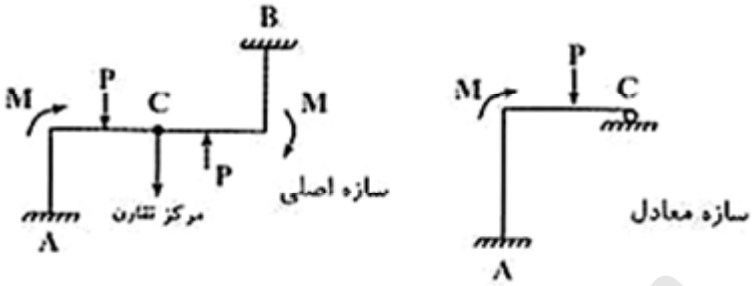
بنابراین پس از نصف نمودن سازه باید در محل تقارن تکیه‌گاهی قرار داد که نیروی محوری و برشی در آن صفر و لنگر خمشی در آن موجود باشد. پس یک لنگر در نقطه‌ی تقارن می‌گذاریم.



SAZE118.COM

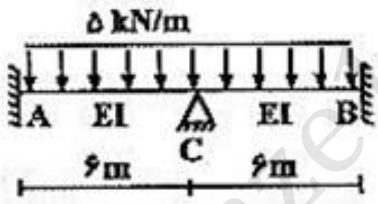
پس در سازه‌های متقارن مرکزی با بارگذاری متقارن معکوس داریم:

1) $\theta_L = \theta_R$ 2) $y_L = -y_R$ 3) $V_L = V_R$ 4) $M_L = -M_R$



* نکته 6: در تمام سازه‌های معادل، برای محاسبه انتگرال‌های گیرداری (F.E.M)، لنگرهای مربوط به سازه اصلی را در محاسبات وارد می‌کنیم.

مثال ۴: M_{CA} در سازه مقابل کدام است؟



1) 25

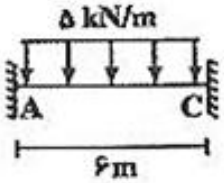
2) 15

3) 12/5

4) 7/5

حل: گزینه‌ی «۲» صحیح است.

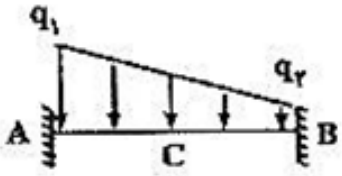
با توجه به تقارن سازه، با استفاده از حالت 5-1-1-ب، سازه معادل به‌صورت زیر خواهد بود. بنابراین از جدول 2-4 داریم:



$$F.E.M = M_{CA} = \frac{qL^2}{12} = \frac{5\times(6)^2}{12} = 15kN.m$$

SAZE118.COM

مثال ۵: لنگر میانه تیر مقابل کدام است؟



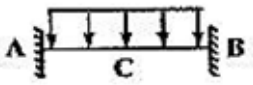
1) $\frac{(q_1+q_2)L^2}{6}$

2) $\frac{(q_1+q_2)L^2}{12}$

3) $\frac{(q_1+q_2)L^2}{24}$

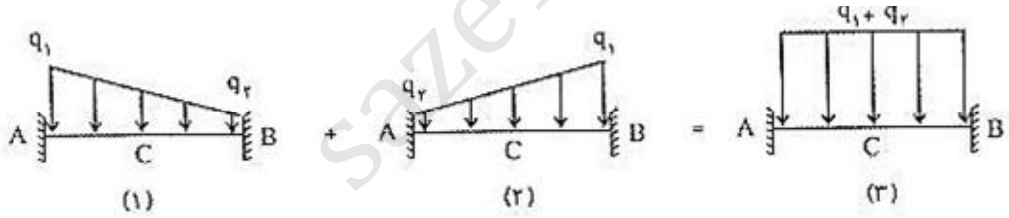
4) $\frac{(q_1+q_2)L^2}{48}$

حل: گزینه‌ی «۴» صحیح است.



می‌دانیم که لنگر میانه تیر با بارگذاری گسترده یکنواخت، برابر $\frac{qL^2}{24}$ است.

اگر بار گسترده بالا را برعکس کنیم (شکل 2)، لنگر میانه تیر تغییر نمی‌کند. از جمع حالت‌های 1 و 2، بار گسترده یکنواخت به شدت q_1+q_2 به‌دست می‌آید که لنگر میانه آن برابر $2M_C$ است. بنابراین داریم:

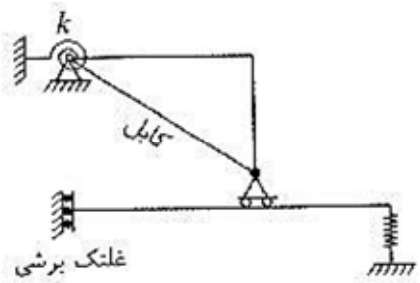


$$2M_C=\frac{(q_1+q_2)L^2}{24}\Rightarrow M_C=\frac{(q_1+q_2)L^2}{48}$$

SAZE118.COM

مجموعه تست

۱- درجات نامعینی سازه شکل زیر، کدام است؟



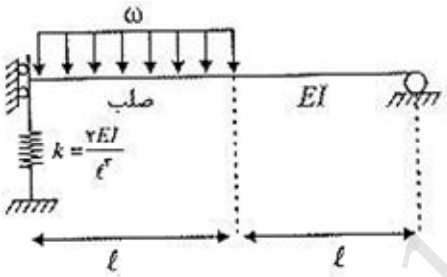
1) 4

2) 2

3) 3

4) 1

۲- در تیر شکل زیر، نیرو دو فنر کدام است؟



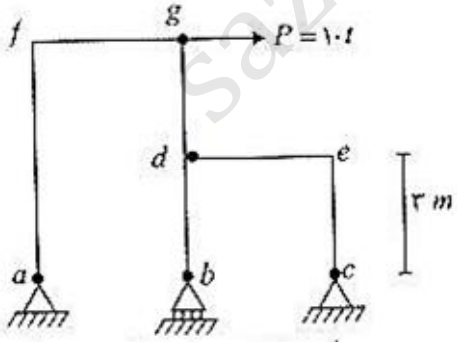
1) 0/5wl

2) 0/3wl

3) 0/4wl

4) 0/2wl

۳- در سازه شکل مقابل که مفصل‌ها با گره توپر شخص شده‌اند در اتصالات صلب f و e، ممان چند t.m است؟



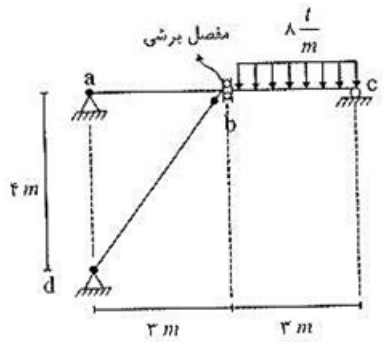
1) $M_e=0\,,\ M_f=60$

2) $M_e=30\,,\ M_f=0$

3) $M_e=15\,,\ M_f=30$

4) $M_e=0\,,\ M_f=0$

۴- در سازه شکل زیر، نیرو در میله bd چند ton است؟



1) 20

2) 10

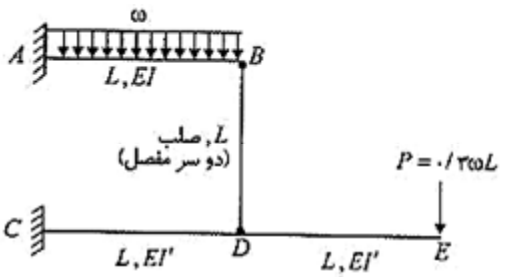
3) 15

4) صفر

saze118.com

SAZE118.COM

۵- ممان اینرسی عضو CDE چند برابر ممان اینرسی عضو AB باشد تا مقدار نیرو در عضو BD صفر شود؟



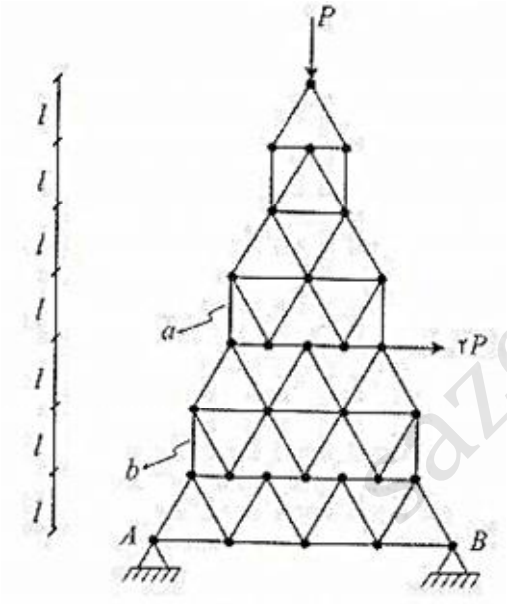
1) 2

2) 1

3) 1/5

4) 0/5

۶- در سازه مفصل (خرپای) متقارن شکل زیر، دو نیروی P و ۲P به آن اعمال شده است. نیروی داخلی عضو b چند برابر عضو a است؟ (ارتفاع برج 7l و قاعده $8\frac{1}{2}$ می‌باشد و سازه بدون اعمال نیرو متقارن است.)



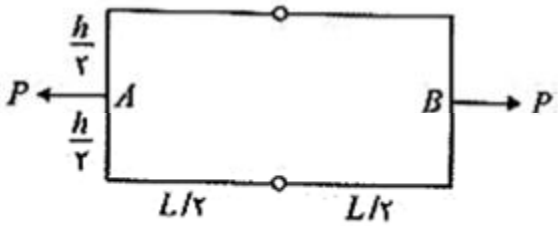
1) $-\frac{2}{3}$

2) $-\frac{5}{3}$

3) $-\frac{4}{3}$

4) $-\frac{7}{3}$

۷- در سازه نشان داده شده، جابه‌جایی نسبی B و A کدام‌اند؟ (EI برای کلیه عضوها ثابت)



1) $\frac{ph^3}{192EI}$

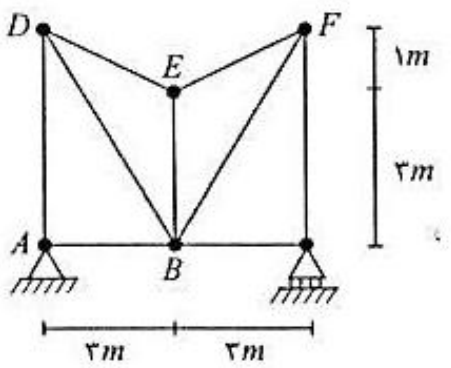
2) $\frac{ph^3}{48EI}$

3) $\frac{ph^3}{96EI}$

4) $\frac{ph^3}{24EI}$

SAZE118.COM

۸- در خرپای شکل مقابل، میله EB موقع مونتاژ سه سانتی‌متر کوتاه است. چنانچه با اعمال بار افقی ۵ تنی در نقطه F نیروی داخلی میله EB، ۳ تن فشاری باشد، تغییر مکان افقی نقطه F پس از مونتاژ و قبل از هرگونه بارگذاری برحسب سانتی‌متر چقدر خواهد شد؟



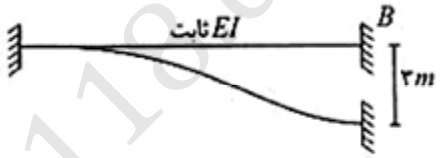
1) 1/8

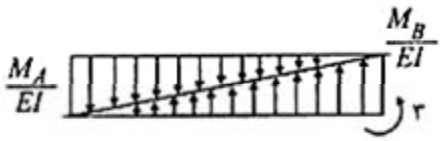
2) 0/9

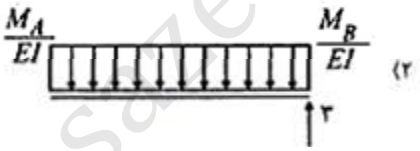
3) 1/2

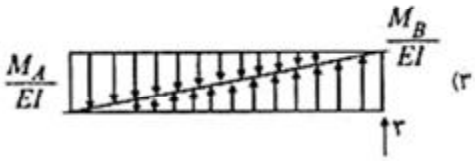
4) 0/6

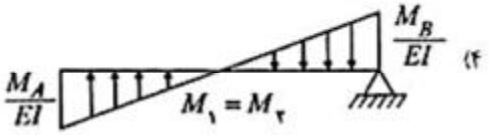
۹- در تیر شکل مقابل، تکیه‌گاه B، ۳ سانتی‌متر نشست کرده است. تیر مزدوج این تیر کدام است؟



۱)


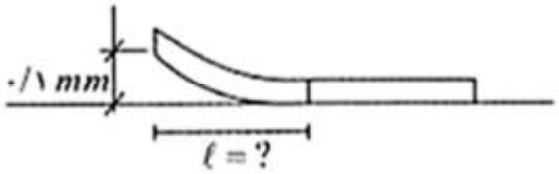
۲)


۳)


۴)


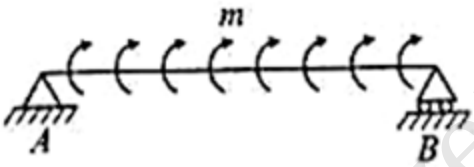
SAZE118.COM

۱۰- تیری که طول آن به حد کافی طولانی است برروی زمین صلب قرار گرفته است. اگر انتهای آن را به اندازه ۰/۱ میلی‌متر بالا ببریم، طولی که از آن برحسب متر (m) از زمین جدا می‌شود، چقدر است؟ (وزن تیر ۰/۰۳ تن بر متر و $El = 200t.m^2$ می‌باشد.)



1) 1 2) 2 3) 1/5 4) 3

۱۱- تیر AB به طول l تحت اثر لنگر خمشی گسترده یکنواخت به شدت m قرار گرفته است. اگر صلیب خمشی و برشی تیر در طول آن ثابت فرض شود، تغییر مکان ناشی از خمش ..... و ناشی از برش ..... است.



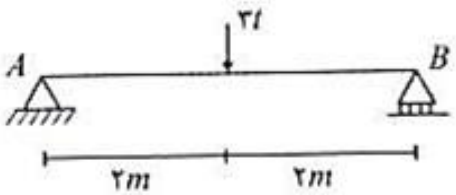
1) غیر صفر – صفر

2) صفر – غیر صفر

3) غیر صفر – غیر صفر

4) صفر – صفر

۱۲- تیر AB به طول 4m و صلبیت خمشی $El = 10^4 t.m^2$ مفروض است. مساحت زیر منحنی تغییر شکل برحسب cm^2 چقدر است؟ (منظور منحنی تغییر شکل ناشی از خمش می‌باشد.)



1) 20

2) 10

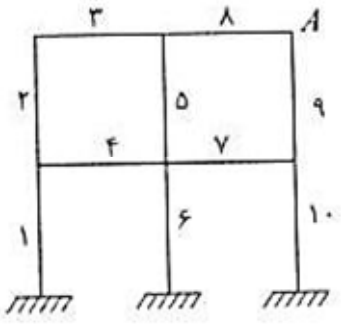
3) 15

4) 5

saze118.com

SAZE118.COM

۱۳- قابی مطابق شکل مفروض است. اعضای قاب مطابق شکل شماره‌گذاری شده‌اند. اگر لنگر خمشی عضو شماره i را با M_i نشان دهیم که در طول عضو (x) متغیر می‌باشد. $M_i = M_i(x)$، دوران نقطه A محل تقاطع عضو ۸ و ۹، کدام است؟



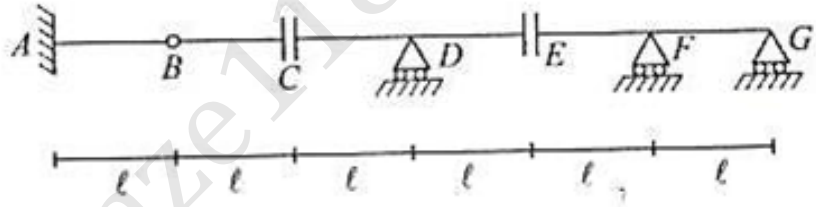
1) $\int_{l_{10}} M_1(x)dx + \int_{l_9} M_9(x)dx + \int_{l_8} M_8(x)dx$

2) $\int_{l_3} M_3(x)dx + \int_{l_8} M_8(x)dx$

3) $\int_{l_6} M_6(x)dx + \int_{l_5} M_5(x)dx + \int_{l_8} M_8(x)dx$

4) $\int_{l_8} M_8(x)dx + \int_{l_9} M_9(x)dx$

۱۴- اگر بار گسترده یکنواختی به شدت w و طول متغیر از تیر شکل مقابل عبور کند، مقدار ماکزیمم لنگر خمشی در A کدام است؟



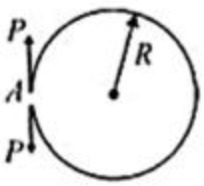
1) $2wl^2$

2) $\frac{wl^2}{2}$

3) $\frac{5wl^2}{2}$

4) $\frac{3wl^2}{2}$

۱۵- حلقه دایره شکلی در نقطه A بریده شده و تحت اثر دو نیروی مساوی با علامت مخالف P قرار گرفته است. بین دو انتهای بریده شده چقدر فاصله، ایجاد می‌شود؟ (صلیب خمشی حلقه را EI فرض کنید و از اثرات برش و نیروی محوری صرف‌نظر نمایید.)



1) $\frac{4\pi PR^3}{EI}$

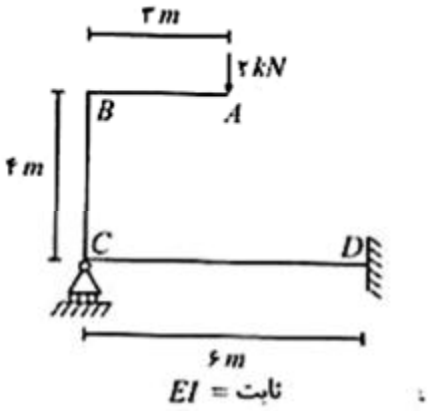
2) $\frac{2\pi PR^3}{EI}$

3) $\frac{3\pi PR^3}{EI}$

4) $\frac{\pi PR^3}{EI}$

SAZE118.COM

۱۶- واکنش تکیه‌گاه C برحسب kN چقدر است؟



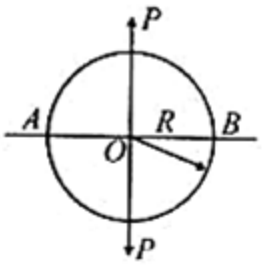
1) 2

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{2}$

4) $\frac{2}{3}$

۱۷- M_A کدام است؟ (صلبیت خمشی، برشی و محوری ثابت است.)



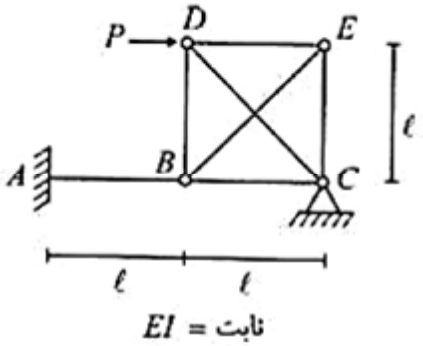
1) $-\frac{PR}{\pi}$

2) $\frac{PR}{2}$

3) $\frac{PR}{\pi}$

4) $PR(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi})$

۱۸- تغییر مکان قائم نقطه B را تعیین کنید.



1) $\frac{12Pl^3}{EI}$

2) $\frac{Pl^3}{3EI}$

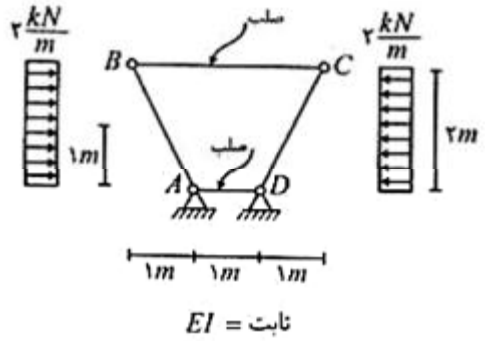
3) $\frac{Pl^3}{8EI}$

4) $\frac{Pl^3}{2EI}$

saze118.com

SAZE118.COM

۱۹- M_E برحسب KN.m چقدر است؟



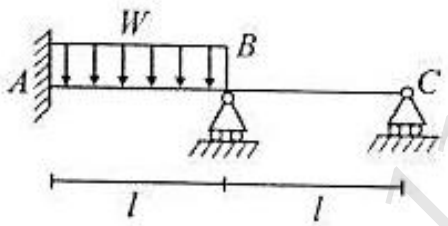
1) $\frac{1}{2}$

2) 2

3) $\frac{2}{3}$

4) 1

۲۰- اگر در تحلیل تیر نامعین شکل مقابل یکی از مجهولات اضافی را M_B انتخاب کنیم، رابطه سازگاری تغییر مکان مربوطه براساس کدام رابطه نوشته می‌شود؟ (چپ: L، راست: R)



1) $\theta_{BL} = \theta_{BR}$

2) $M_{BL}\theta_{BL} = M_{BR}\theta_{BR}$

3) $\theta_{BL} + \theta_{BR} = 0$

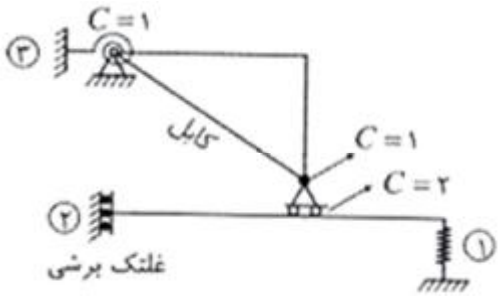
4) $M_{BL}\theta_{BL} + M_{BR}\theta_{BR} = 0$

saze118.com

SAZE118.COM

پاسخ تشریحی

۱- گزینه «۲»

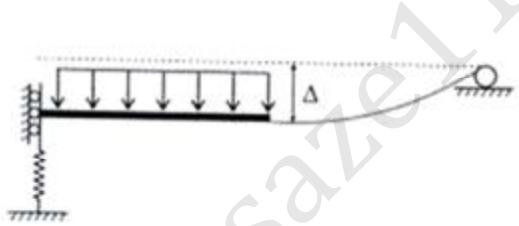


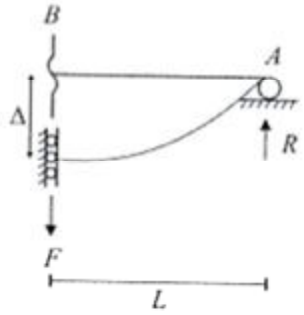
با استفاده از رابطه 4-1 و برای یک حلقه بسته داریم:

$$r = 3+2+1 = 6$$
$$c = 1+1+2 = 4$$
$$n = (3\times 1+6)-(3+4) = 2$$

۲- گزینه «۳»

با جدا کردن سمت راست سازه و نوشتن معادله شیب – افت، مقدار نیروی F را محاسبه می‌کنیم.





$$M = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \frac{\breve{\Delta}}{L}) = 0 \Rightarrow 2\theta_A = -\frac{\breve{\Delta}}{L} \Rightarrow \theta_A = -\frac{\breve{\Delta}}{2L}$$

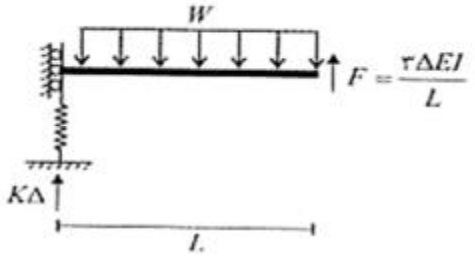
$$M = \frac{2EI}{L}(\theta_A + \frac{3\Delta}{L}) = \frac{2EI}{L}(-\frac{3}{2}\frac{\Delta}{L} + \frac{3\Delta}{L}) = \frac{3\Delta EI}{L^2}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R = \frac{3\Delta EI}{L^3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F = \frac{3\Delta EI}{L^3}$$

SAZE118.COM

حال سمت چپ سازه را جدا نموده و عکس‌العمل F را در آن نشان می دهیم.



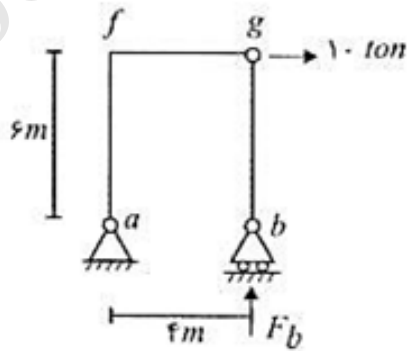
$$\sum F_y=0\Rightarrow K\Delta+\frac{3\Delta EI}{L^3}=WL$$

$$\frac{2EI\Delta}{L^3}+\frac{3EI\Delta}{L^3}=WL\Rightarrow\frac{5EI\Delta}{L^3}=WL\Rightarrow\Delta=\frac{WL^4}{5EI}$$

$$\text{نیروی فنر}=K\Delta=\frac{2EI\Delta}{L^3}=\frac{2EI}{L^3}\left(\frac{WL^4}{5EI}\right)=0/4WL$$

۳- گزینه «۱»

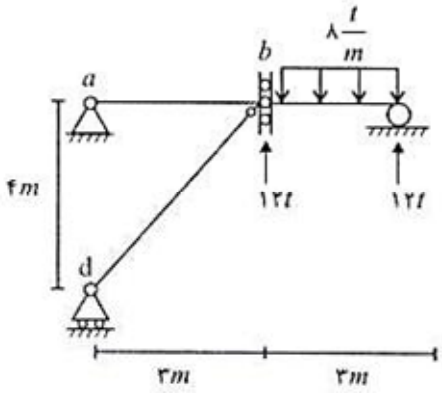
به دلیل مفصل بودن اتصالات d و c می‌توان سمت راست سازه را جدا نمود (لنگر عضو e صفر است.) با تحلیل سمت چپ سازه داریم:

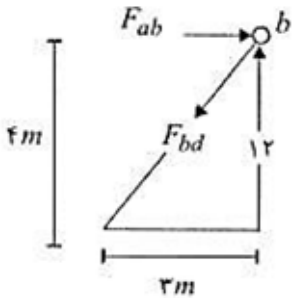


$$\sum M_\alpha=0\Rightarrow 10\times6-F_b\times4=0\Rightarrow F_b=15\text{ton}$$

$$M_f=15\times4=60\text{ton.m}$$

۴- گزینه «۳»





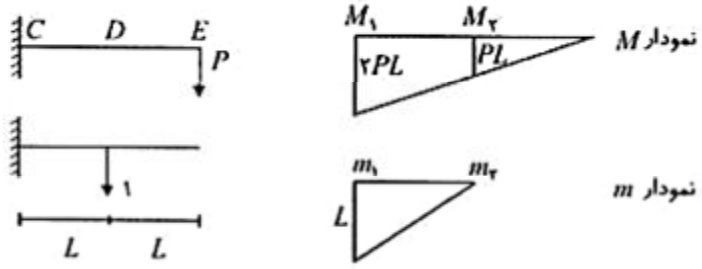
$$\frac{12}{4}=\frac{F_{bd}}{5}\Rightarrow F_{bd}=15$$

۱۵- گزینه «۱»

saze118.com

SAZE118.COM

با توجه به سازگاری تغییر مکان‌ها، تغییر مکان میانه تیر پایین (ناشی از بار P) باید برابر تغییر مکان انتهایی تیر بالا (ناشی از بار گسترده w) باشد. تغییر مکان میانه تیر پایین را از روش کار مجای محاسبه می‌کنیم.



$$\Delta = \int_0^{2L} \frac{mMdx}{EI} = \frac{L}{6E}$$

از آنجا که صورت مسئله ممان اینرسی عضو CDE را چند برابر عضو AB دانسته است، I_{CE} را برابر XI_{AB} در نظر می گیریم و X را به‌دست می‌آوریم.

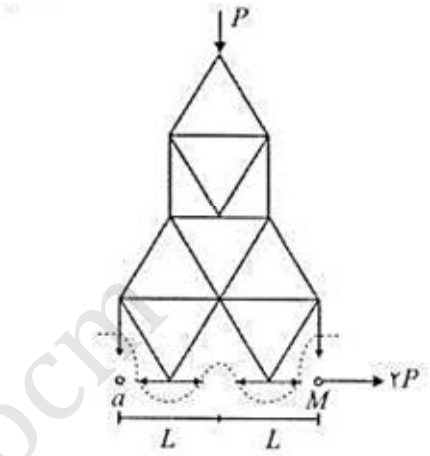
$$\left.\begin{aligned}\Delta_{AB} &= \frac{WL^4}{8EI_{AB}} \\ \Delta_{CDE} &= \frac{5PL}{6EI_{CE}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{WL^4}{8EI_{AB}} = \frac{50(0/3WL)L^3}{6E(XI_{AB})} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{4X} \Rightarrow X = 2$$

saze118.com

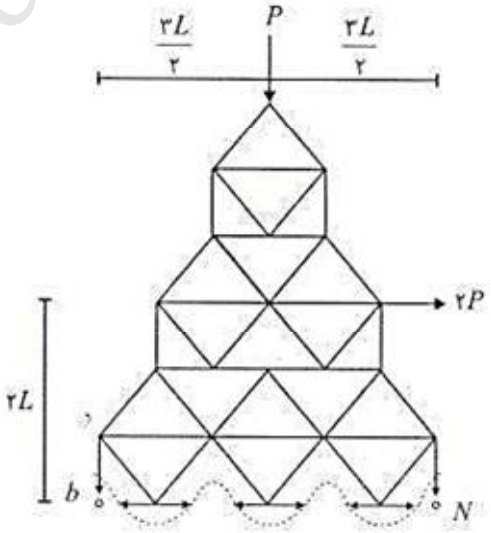
SAZE118.COM

۶- گزینه «۶»

سازه را به‌صورت نشان داده شده برش می‌زنیم:



$$\sum M_M = 0 \Rightarrow \alpha(2L) + PL = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-P}{2}$$



$$\sum M_N = 0$$

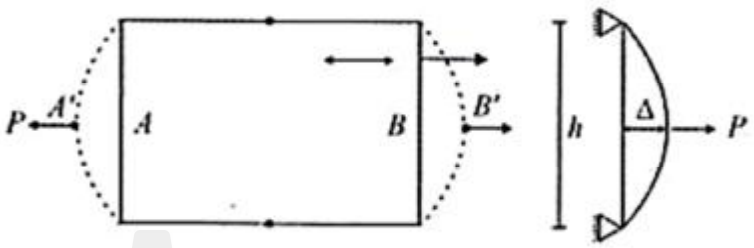
$$P(\frac{3L}{2}) - 2P(2L) + b(3L) = 0$$

$$\frac{3PL}{2} + 3bL = \frac{8PL}{2}$$

$$b = \frac{5}{6}P$$

$$\frac{b}{\alpha} = \frac{\frac{5}{6}P}{\frac{1}{2}P} = \frac{5}{3}$$

۷- گزینه «۴»



$$\Delta = \frac{ph^3}{48EI}$$

$$\text{جابه‌جایی نسبی } A,B = 2\Delta = \frac{ph^3}{24EI}$$

saze118.com

SAZE118.COM

۸- گزینه «۱»

با استفاده از قانون ماکسول – بتی داریم:

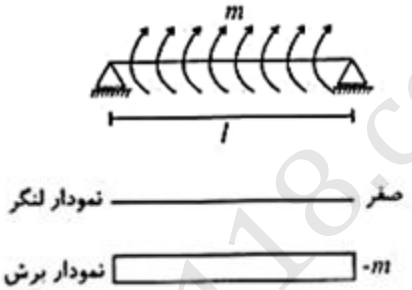
$$p_1\delta_1 = p_2\delta_2 \Rightarrow 5\delta_1 = 3\times 3 \Rightarrow \delta_1 = 1/8\text{cm}$$

۹- گزینه «۱»

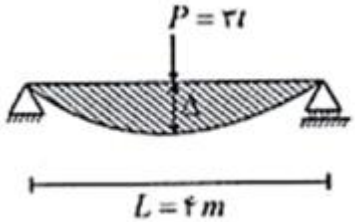
همان‌طور که در مثال 5 فصل سوم نیز اشاره شد، تغییر مکان در تیر اصلی معادل لنگر خمشی در تیر مزدوج است. بنابراین با توجه به گزینه‌ها ملاحظه می شود که گزینه «1» پاسخ صحیح است.

۱۰- گزینه «۲»

۱۱- گزینه «۲»)



۱۲- گزینه «۲»



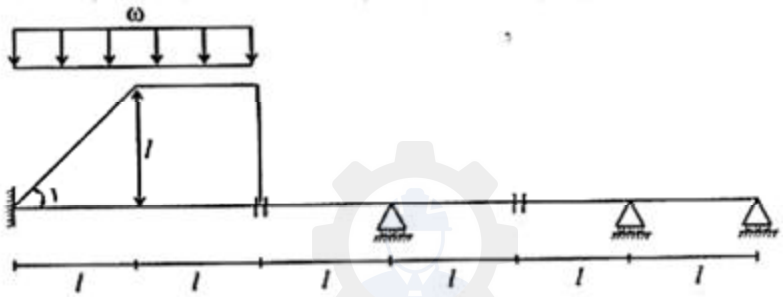
$$\Delta = \frac{pL^3}{48EI} = \frac{3(4)^3}{48\times 10^4} = 4\times 10^{-4}\,\text{m} = 0/04\text{cm}$$

$$A = \frac{2}{3}\Delta L = \frac{2}{3}\times 0/04(400) = 10/66\text{cm}^2$$

۱۳- گزینه «۳»

۱۴- گزینه «۴»

سازه را در نقطه A برش زده و به آن اجازه چرخش به اندازه واحد می‌دهیم. با رسم نمودار خط تأثیر، ملاحظه می‌شود که بیشینه لنگر خمشی در تکیه‌گاه A، زمانی رخ می‌دهد که بار گسترده W در فاصله AC وارد شود و مقدار آن برابر است با:



SAZE118.COM

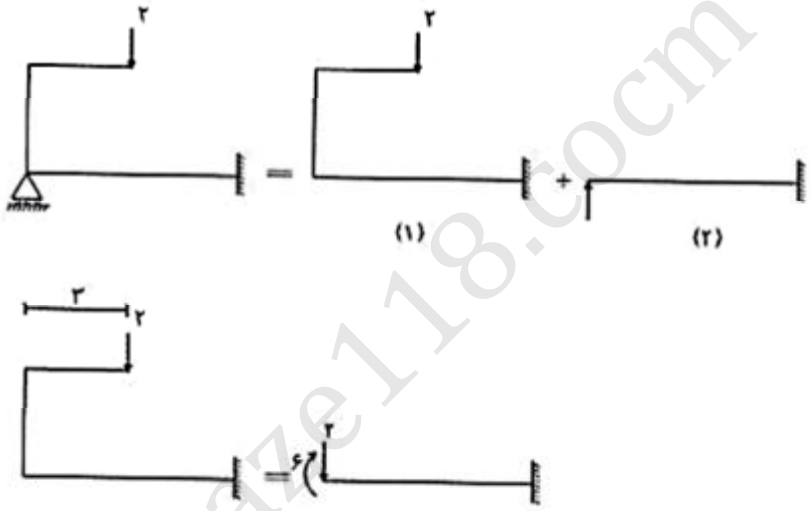
$$M_A = \frac{3}{4}(L)(2L)AW = \frac{3}{2}WL^2$$

(دقت شود که شیب در دو طرف مفصل برشی باید برابر باشد.)

۱۵- گزینه «۳»

۱۶- گزینه «۳»

با استفاده از روش کار مجازی و سازگاری تغییر مکان‌ها داریم:



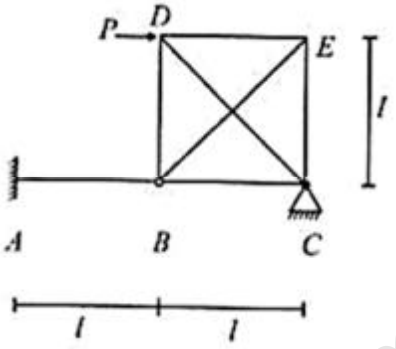
$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{PL^3}{3EI} - \frac{ML^2}{2EI} = \frac{2(6)^3}{3EI} - \frac{6(6)^2}{2EI} = \frac{36}{EI}\\ \Delta_2 &= \frac{R_C L^3}{3EI} = \frac{R_C(6)^3}{3EI} = \frac{72R_C}{EI}\end{aligned}\right\} \Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow 72R_C = 36 \Rightarrow R_C = \frac{1}{2}$$

۱۷- گزینه «۴»

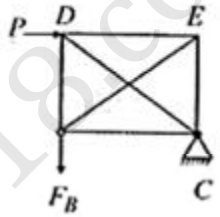
SAZE118.COM

۱۸- گزینه «۲»

سمت راست سازه را جدا می‌کنیم و جداگانه آن‌را تحلیل می‌کنیم.



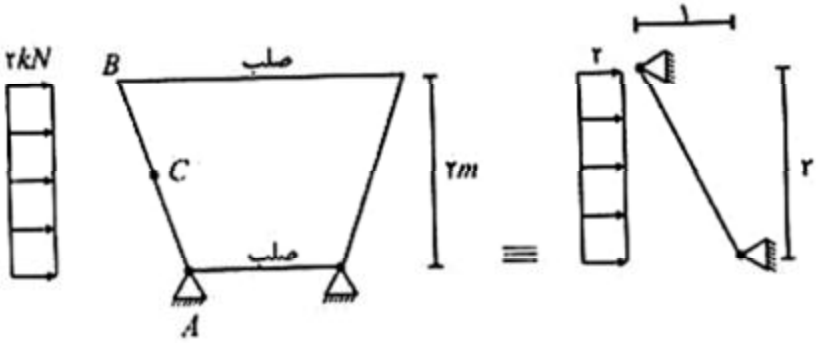
عکس‌العمل B را محاسبه می‌کنیم.



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_B = P$$

$$\Delta_B = \frac{F_B L^3}{3EI} = \frac{PL^3}{3EI}$$

۱۹- گزینه «۴»



$$M_C = \frac{WL^2}{8} = \frac{2(2)^2}{8} = 1$$

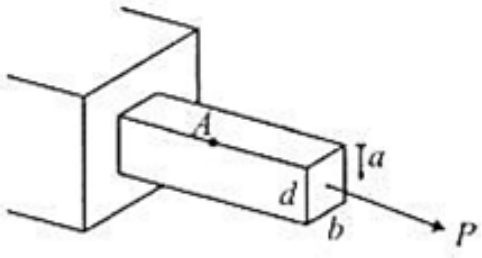
۲۰- گزینه «۱»

saze118.com

SAZE118.COM

مجموعه تست

۱- نیروی متمرکز P در عمق α از مقطع تیر نشان داده شده اثر می‌کند. ارتفاع مقطع را به گونه‌ای تعیین کنید که تنش در نقطه A حداکثر باشد؟



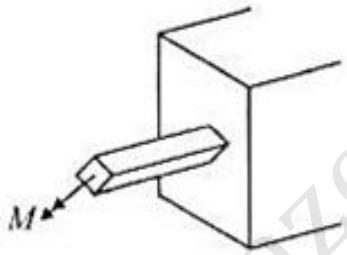
1) b

2) $\frac{bd}{2\alpha}$

3) 3α

4) 2α

۲- چنانچه اضلاع چهارگوش مربع شکل برابر α باشد، انحنای ایجاد شده در اثر لنگر M را محاسبه کنید. (مدول ارتجاعی مقطع E می‌باشد.)



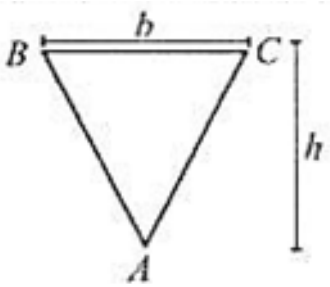
1) $\frac{2\alpha^2 M}{AE}$

2) $\frac{12M}{E\alpha^4}$

3) $\frac{5E\alpha^4}{12M}$

4) $\frac{5M}{12E\alpha^4}$

۳- چنانچه نیروی برشی وارده بر مقطع مثلثی نشان داده شده برابر V باشد، تنش برشی حداکثر در چه فاصله‌ای از نقطه A در روی مقطع ایجاد می‌شود؟



1) $\frac{h}{2}$

2) $\frac{h}{4}$

3) $\frac{2h}{3}$

4) $\frac{h}{3}$

۴- تغییر مکان محوری رأس مخروطی توپر به ارتفاع h و شعاع قاعده R، وزن مخصوص γ و مدول الاستیسته E را تحت وزن مخروط به‌دست آورید.

1) $\frac{\gamma Rh}{6E}$

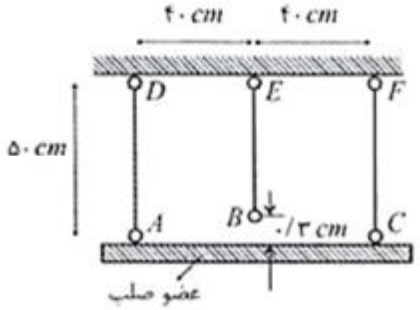
2) $\frac{\gamma h^2}{3E}$

3) $\frac{\gamma h^2}{6E}$

4) $\frac{\gamma Rh}{3E}$

SAZE118.COM

۵- در سازه شکل زیر برای اتصال سه میله عمودی به صفحه صلب، نقطه B به اندازه $0/3cm$ کوتاه می‌باشد. درصورتی که عضو BE تحت کشش به صفحه صلب متصل شود. نیروی داخلی هر یک از اعضا را برحسب kg به‌دست آورید. سطح مقطع و مدول ارتجاعی هر سه میله عمودی به ترتیب برابر $5cm^2$,$4\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ می‌باشد.



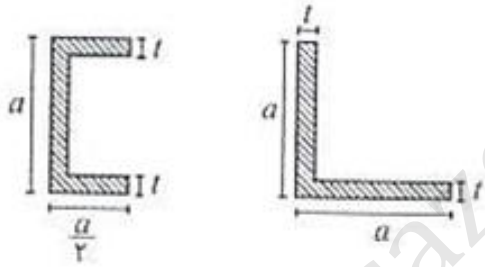
1) $F_{AD}=F_{CF}=2000, F_{BE}=4000$

2) $F_{AD}=F_{CF}=1000, F_{BE}=2000$

3) $F_{AD}=F_{CF}=4000, F_{BE}=8000$

4) $F_{AD}=F_{CF}=8000, F_{BE}=16000$

۶- چه رابطه‌ای بین ظرفیت پیچش مقاطع جدار نازک داده شده، برقرار است؟



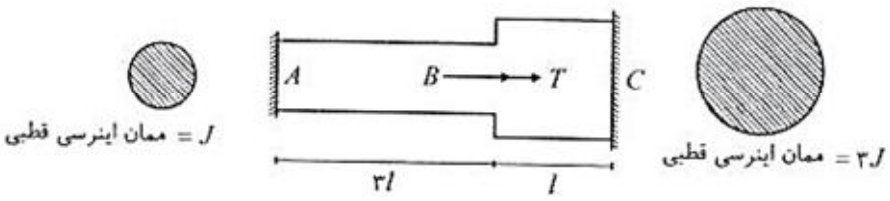
1) ظرفیت پیچشی ناودانی دو برابر مقطع نبشی است.

2) رابطه‌ای بین ظرفیت پیچشی دو مقطع وجود ندارد.

3) ظرفیت پیچشی هر دو مقطع یکسان است.

4) ظرفیت پیچشی مقطع نبشی دو برابر مقطع ناودانی است.

۷- عضو با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کوپل پیچشی T در نقطه B قرار دارد. مطلوب است تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و C.



1) $T_A=\frac{7T}{10}, T_C=\frac{3T}{10}$

2) $T_A=\frac{3T}{10}, T_C=\frac{7T}{10}$

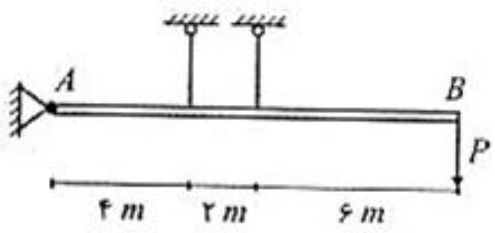
3) $T_A=\frac{9T}{10}, T_C=\frac{T}{10}$

4) $T_A=\frac{T}{10}, T_C=\frac{9T}{10}$

saze118.com

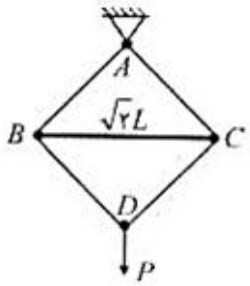
SAZE118.COM

۸- مطابق شکل تیر طب **AB** توسط دو میله که دارای سطح مقطع $20cm^2$ و تنش مجاز $36\frac{kg}{cm^2}$ می‌باشند. نگهداری شده و نیروی **P** به آن وارد می‌شود. مقدار بار مجاز **P** وارد بر سازه برحسب **kg** چقدر است؟



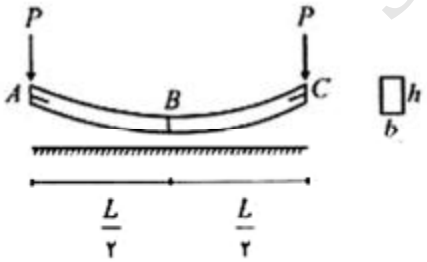
1) 870
2) 520
3) 250
4) 780

۹- در سازه نشان داده شده میله **BC** صلب است. جابه‌جای نقطه **D** کدام است؟ (**AE** و **L** برای کلیه اعضای مورب ثابت است.)



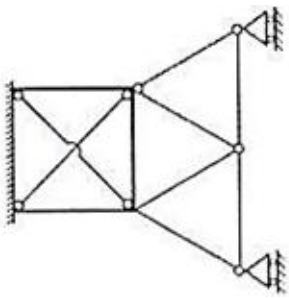
1) $\frac{PL}{2AE}$
2) $\frac{PL}{AE}$
3) $\frac{2PL}{AE}$
4) $\frac{\sqrt{2}PL}{AE}$

۱۰- در تیر موردنظر انحناء ان بدون بار در نقطه **B** برابر با R_1 می‌باشد. مقدار نیروی لازم **P** چقدر باشد تا انحناء در **B** صفر شود؟



1) $\frac{Ebh^3}{3LR_1}$
2) $\frac{Ebh^3}{6LR_1}$
3) $\frac{Ebh^3}{12LR_1}$
4) $\frac{Ebh^3}{24LR_1}$

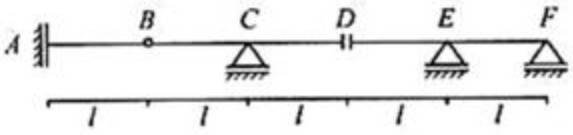
۱۱- تعداد درجات نامعین سازه زیر کدام است؟



1) 13
2) 9
3) 8
4) 15

SAZE118.COM

۱۲- اگر بار گسترده یکنواخت به شدت w بتواند به‌طور اختیاری در دهانه‌های مختلف (تیر مطابق شکل) قرار گیرد. حداکثر لنگر خمشی در مفصل برشی D چقدر است؟



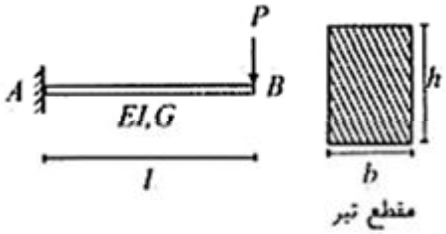
1) $\frac{Wl^2}{2}$

2) $\frac{3Wl^2}{2}$

3) Wl^2

4) $2Wl^2$

۱۳- تغییر مکان قائم نقطه B با در نظر گرفتن انرژی برشی و خمشی نسبت به حالتی که فقط انرژی خمشی در نظر گرفته شود چند درصد افزایش می‌یابد؟ فرض کنید $(\frac{1}{h}=10\,,\ \frac{E}{G}=2/4)$



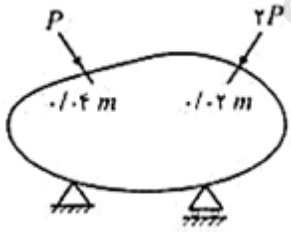
1) ٪1/072

2) ٪0/0072

3) ٪0/72

4) ٪1/72

۱۴- سازه الاستیک خطی مطابق شکل مفروض است. اگر انرژی تغییر شکل این سازه را برحسب نیروهای وارده P بیان کنیم، $U=U(p)$ **کدام رابطه صحیح است؟**



1) $\frac{\partial U}{\partial p}=0/06m$

2) $\frac{\partial U}{\partial p}=0/05m$

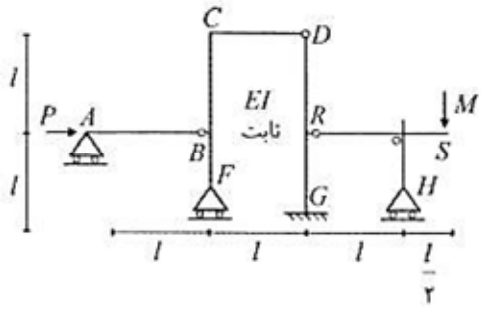
3) $\frac{\partial U}{\partial p}=0/04m$

4) $\frac{\partial U}{\partial p}=0/08m$

saze118.com

SAZE118.COM

۱۵- چنانچه جابه‌جایی افقی **D** برابر $\frac{9Ml^3}{EI}$ باشد، نسبت $\frac{M}{P}$ کدام است؟



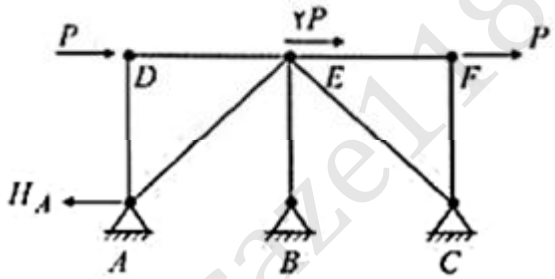
1) $\frac{1}{3}$

2) $\frac{8}{27}$

3) 1

4) چون تغییر مکان D ارتباطی به M ندارد پس $\frac{M}{P}=0$ است.

۱۶- خرپای متقارن (از لحاظ هندسی) مطابق شکل مفروض است. طول اعضای مورب $L\sqrt{2}$ و سایر اعضاء L و صلبیت محوری اعضا **EA** فرض می‌شود. عکس‌العمل افقی $(H_A)A$ چقدر است؟



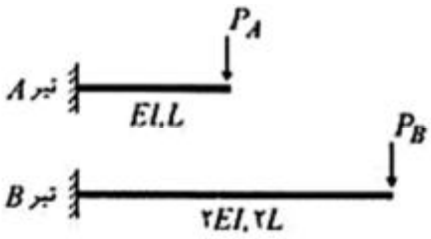
1) 4P

2) $\frac{3P}{2}$

3) 2P

4) P

۱۷- اگر انرژی ذخیره شده در تیرهای **A** و **B** در اثر خمش برابر باشدع نسبت $\frac{P_A}{P_B}$ چقدر است؟



1) 2

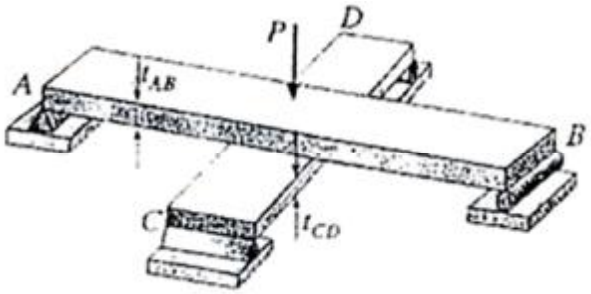
2) 1

3) $\sqrt{2}$

4) $\frac{1}{2}$

SAZE118.COM

۱۸- تیرهای AB و CD از یک جنس و با عرض یکسان مطابق شکل عمود بر همدیگر در یک صفحه روی همدیگر قرار گرفته‌اند. قبل از اعمال بار P هیچ نیروی در تیرها وجود ندارد (از وزن آن‌ها صرف‌نظر می‌شود) در صورتی‌که $L_{AB} > L_{CD}$ باشد، نسبت $t_{AB} | t_{CD}$ چقدر باشد تا این که عکس‌العمل‌های هر چهار تکیه‌گاه برابر شوند؟



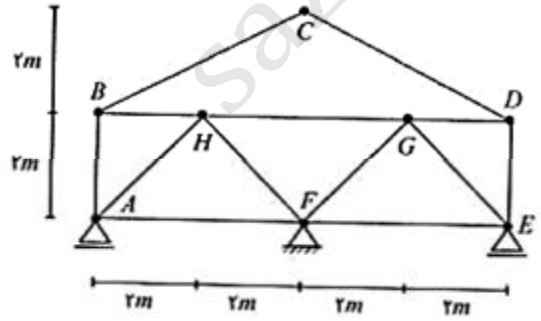
1) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{2L_{AB}}{L_{CD}}$

2) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{2L_{CD}}$

3) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{2L_{CD}}$

4) $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$

۱۹- در خرپای شکل داده شده، چنانچه دمای تمامی اعضا $20^{\circ}C$ بالا رفته باشد با فرض $EA = 200ton$ برای تمام اعضا $\alpha = 1\times10^{-5}\frac{cm}{cm^{\circ}C}$ نیروی داخلی عضو DG چقدر خواهد بود؟



1) 20^{t}

2) 10^{t}

3) 15^{t}

4) 5^{t}

saze118.cocm

SAZE118.COM

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با در نظر گرفتن اثر متقابل کشش ناشی از بار محوری و کشش ناشی از خمش باید P را به گونه‌ای قرار دهیم که در نقطه A در اثر خمش، کشش به‌وجود آید، در این صورت با جمع این دو تنش کششی داریم:

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{MC}{I}=\frac{P}{bd}+\frac{(\frac{d}{2}-\alpha)P\times\frac{d}{2}}{\frac{1}{12}bd^3}=\frac{P}{bd}+\frac{6P(\frac{d}{2}-\alpha)}{bd^2}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial d}=\frac{-bP}{b^2d^2}+\frac{3P(bd^2)-2bd(6P(\frac{d}{2}-\alpha))}{b^2d^4}=0\rightarrow d=3\alpha$$

۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$\text{انحنا}=\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}=\frac{M}{E\frac{1}{12}\alpha^4}=\frac{12M}{E\alpha^4}$$

$$I=\frac{1}{2}\alpha^4$$

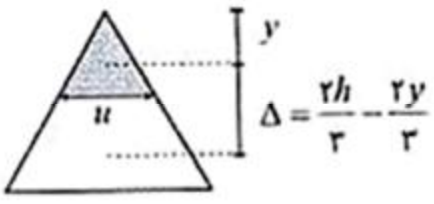
۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

چون V و I ثابت است پس تنش برشی هنگامی ماکزیمم می‌شود که $\frac{Q}{t}$ ماکزیمم شود.

$$\tau=\frac{VQ}{It}$$

$$\frac{Q}{t}=\frac{\frac{uy}{2}\times(\frac{2h}{3}-\frac{2y}{3})}{u}=\frac{y}{2}(\frac{2h}{3}-\frac{2y}{3})=\frac{yh}{3}-\frac{y^2}{3}$$

$$\frac{\partial(\frac{Q}{t})}{\partial y}=\frac{h}{3}-\frac{2y}{4}=0\rightarrow\frac{h}{3}=\frac{2y}{3}\rightarrow y=\frac{h}{2}$$



۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

SAZE118.COM

$$P = W = \gamma V = \gamma \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

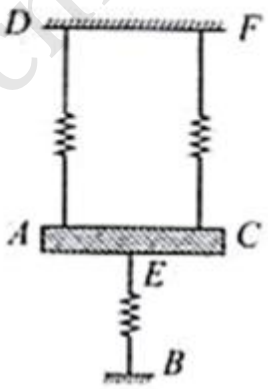
$$d\delta = \frac{Pdy}{AE} = \frac{\pi R^2 ydy \times \gamma}{3\pi R^2 E} = \frac{\gamma ydy}{3E}$$

$$\delta = \int_0^h d\delta = \int_0^h \frac{\gamma ydy}{3E} = \frac{\gamma}{3E}[\frac{1}{2}y^2]_0^h = \frac{\gamma}{3E} \times \frac{1}{2}h^2 = \frac{\gamma h^2}{6E}$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

سه میله مانند سه فنر عمل می‌کنند به شکل زیر:

دو میله AD و CF به صورت موازی هستند و فنر EB به‌صورت متوالی با مجموعه این دو فنر است.



$$K = \frac{AE}{L} = \frac{5 \times 4 \times 10^5}{50} = 4 \times 10^4$$

$$K^{eq}_{AD,CF} = K_{AD} + K_{CF} = (4+4) \times 10^4 = 8 \times 10^4$$

$$K^{eq}_{total} \Rightarrow \frac{1}{K_{tot}} = \frac{1}{K^e_{AD,CF}} + \frac{1}{K_{EB}} = \frac{1}{8 \times 10^4} + \frac{1}{4 \times 10^4} \Rightarrow K_{tot} = \frac{8}{3} \times 10^4$$

$$F_{tot} = K\Delta = \frac{8}{3} \times 10^4 \times 0/3 = 8000ton \Rightarrow F_{EB} = 8000ton$$

$$F_{AD} = F_{CF} = \frac{8000}{2} = 4000ton$$

۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

چون در هر دو مقطع t, α همچنین نسبت $\frac{\alpha}{t}$ یکسان است و در ضمن دو سر آزاد به هم نچسبیده است پس ظرفیت پیچشی هر دو مقطع یکسان است.

(3 $T_A = \frac{9}{10}T$, $T_C = \frac{T}{10}$

(4 $T_A = \frac{T}{10}T$, $T_C = \frac{9}{10}T$

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

زاویه پیچش هر دو عضو یکسان است:

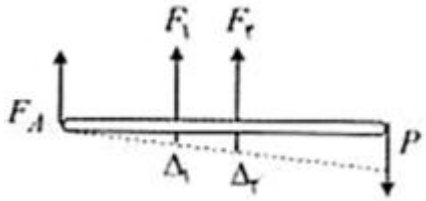
SAZE118.COM

$$\phi_{AB}=\phi_{BC}$$
$$\frac{T_{AB}L_{AB}}{G.J_{AB}}=\frac{T_{BC}L_{BC}}{G.J_{BC}}$$
$$\frac{T_{AB}\times 3l}{GJ}=\frac{T_{BC}\times l}{G\times 3J}$$
$$9T_{AB}=T_{BC}$$
$$T_{AB}=\frac{1}{10}T$$
$$T_{BC}=\frac{9}{10}T$$

۸- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

دیاگرام آزاد تیر را رسم می‌کنیم:

$$\Delta_2=\frac{3}{2}\Delta_1 \Rightarrow F_2=\frac{3}{2}F_1$$
$$\sum M_A=0$$
$$4F_1+6F_2=12P$$
$$4F_1+6(\frac{3}{2}F_1)=12P$$
$$4F_1+9F_1=12P \Rightarrow F_1=\frac{12}{13}P$$
$$F_2=\frac{3}{2}\times\frac{12}{13}P=\frac{18}{13}P$$
$$\sigma=\frac{P}{A} \Rightarrow P=20\times 36=720$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_A=-\frac{17}{13}P$$
$$P_{max}=\frac{13}{18}\times 720=520$$



۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

چهار میله به‌صورت چهار فنر عمل می‌کند که به‌علت وجود میله صلب BC دو به دو موازی هستند.

saze118.com

SAZE118.COM

سنجش دانش

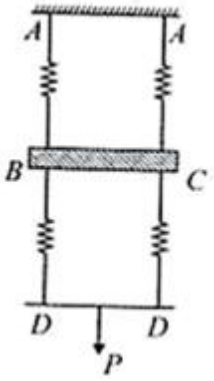
$$K_{AB}=K_{AC}=K_{BD}=K_{CD}=\frac{EA}{l}\cos^2 45=\frac{EA}{2l}$$

$$K_{eq}^{BD,CD}=K_{eq}^{AB,AC}=\frac{EA}{2l}+\frac{EA}{2l}=\frac{EA}{L}$$

$$K_{total}\Rightarrow\frac{1}{K_{tot}}=\frac{1}{K_{eq}^{AB,BC}}+\frac{1}{K_{eq}^{BD,CD}}=\frac{l}{EA}+\frac{l}{EA}=\frac{2l}{EA}$$

$$K_{tot}=\frac{EA}{2l}$$

$$\Delta_D=\frac{P}{K}=\frac{2Pl}{EA}$$



۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$\frac{1}{R_1}=\frac{M}{EI}=\frac{\frac{Pl}{2}}{\frac{1}{12}bh^3E}=\frac{6Pl}{bh^3E}$$

$$R_1=\frac{Ebh^3}{6Pl}$$

۱۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

۱۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

خط تأثیر لنگر خمشی در D به‌صورت زیر است:

بیش‌ترین لنگر خمشی در D هنگام ایجاد می‌شود که بار گسترده یکنواخت در فاصله A تا C باشد در این‌صورت:

$$M_D=l\times\frac{1}{2}\times w+l\times l\times w=\frac{3}{2}wl^2$$

۱۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

انرژی جنبشی ناشی از خمش

$$u_m=\int_0^l\frac{M^2}{2EI}dx=\int_0^l\frac{P^2x^2}{2EI}dx=\frac{P^2l^3}{6E\times\frac{1}{12}bh^3}=\frac{2\times10^3\times P^2}{2/4Gb}=\frac{2\times10^3}{2/4}\alpha\qquad(\frac{P^2}{Gb}=\alpha)$$

SAZE118.COM

انرژی جنبشی ناشی از برش $u_s = \int_0^l \frac{V^2}{2GA} f_s dx = \int_0^l \frac{P^2 \times \frac{6}{5}}{2GA} dx = \frac{6P^2}{Gb} = 6\alpha \qquad (\frac{P^2}{Gb} = \alpha)$

مستطیل $f_s = \frac{6}{5}$

$\frac{u_m - u_s}{u_m} = 0/72\%$

۱۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

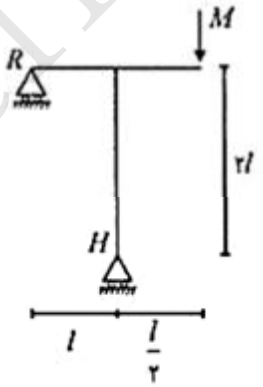
$u = 0/04P + 0/02 \times 2P = 0/08P$

$\frac{\partial u}{\partial P} = 0/08P$

۱۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به مفصل R و تکیه‌گاه غلتکی H، بخش ROSH تنها نیروی محوری قائم را می‌تواند به بخش GD اعمال کند، که این نیرو برابر است با:

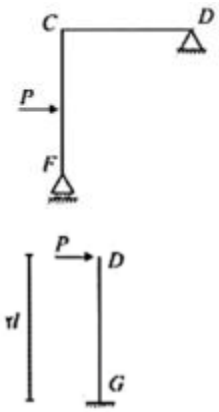
$F_R^V = M$



بخش AB یک میله دو سر مفصل است که نیروی محوری P را به CF وارد می‌کند.

$F_D^H = P \quad , \quad F_D^V = -P \quad , \quad F_F^V = P$

$\Delta_D^H = P\frac{(2l)^3}{3EI} = \frac{8Pl^3}{3EI} \qquad (I)$



SAZE118.COM

طبق صورت سؤال: $\Delta_D^H = \frac{9l^3M}{EI} \quad (II)$

$$(I)=(II) \Rightarrow \frac{8Pl^3}{3EI} = \frac{9ML^3}{EI} \Rightarrow \frac{M}{P} = \frac{27}{8}$$

۱۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با تعادل نقطه‌ها $H_A = 2P$

۱۷- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

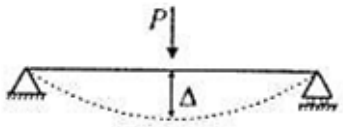
$$u_A = \int_0^{l_A} \frac{M_A^2 dx}{2EI} = \int_0^{l} \frac{P_A^2 x^2}{2EI} = \frac{P_A^2 l^3}{6EI} \quad (I)$$

$$u_B = \int_0^{l_B} \frac{M_B^2 dx}{2EI} = \int_0^{l} \frac{P_B^2 (2l)^3}{6\times 2EI} = \frac{8P_B^2 l^3}{12EI} \quad (II)$$

$$(I)=(II) \Rightarrow (\frac{P_A}{P_B})^2 = \frac{8}{12}\times 6 = 4 \rightarrow \frac{P_A}{P_B} = 2$$

۱۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

وقتی عکس‌العمل چهار تکیه‌گاه برابر می‌شود که سختی قائم دو تیر یکسان باشد در این‌صورت دو تیر مانند دو فنر موازی عمل می‌کنند که سختی قائم یکسان $\frac{48EI}{l^3}$ دارند و به همین دلیل سهم یکسانی از P را دریافت می‌کنند.



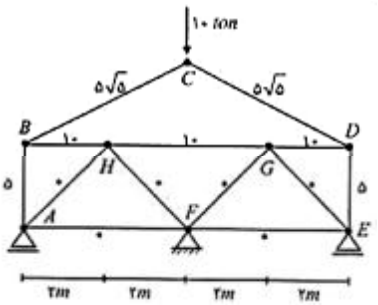
$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} \rightarrow K = \frac{48EI}{l^3}$$

$$K_{AB} = K_{CD} \rightarrow \frac{\frac{48E}{12} bt_{AB}^3}{l_{AB}^3} = \frac{\frac{48E}{12} bt_{CD}^3}{l_{CD}^3} \rightarrow \frac{t_{AB}^3}{l_{AB}^3} = \frac{t_{CD}^3}{l_{CD}^3} \rightarrow \frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{l_{AB}}{l_{CD}}$$

۱۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

چون خرپا معین است پس تغییر دما در اعضا باعث به‌وجود آمدن نیروی داخلی نمی‌شود فقط کافی است خرپا را تحت نیروی 10ton تحلیل کنیم (تغییر دما باعث تغییر مکان می‌شود.)

نیروی داخلی اعضا عبارت است از:



saze118.com

منابع

1- «سازه‌های نامعین استاتیکی»، چو کیا ونگ، ترجمه: محمد رحیمیان – فرهاد علمی، 1360، انتشارات دهخدا.

2- «تحلیل سازه‌ها»، محمدرضا اخوان لیل آبادی – شاپور طاحونی، 1376، چاپ سیزدهم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

3- «تحلیل سازه‌ها»، پروفسور علی کاوه، 1385، چاپ نهم، مرکز نشر دانشگاهی.

4- «تحلیل سازه‌ها – جلد اول»، حجت الله عادلی، 1373، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه تهران.

5- «اصول تحلیل سازه‌ها»، ت.م. چارلتون، ترجمه: مجید بدیعی، 1360، انتشارات دهخدا.

6- «کتاب عمران»، مهران بکائی- امیر مسعود سامانی، چاپ پنجم، 1379، ارکان، اصفهان.

7- «مجموعه سؤالات آزمون‌های ورودی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران»، 1372 الی 1386، سازمان سنجش آموزش کشور.

8- جزوات تدریس شده در کلاس‌های کنکور کارشناسی ارشد.

9- "mechanics of materials", Roy R.Craig, 2nd Edition, 2000, John Wiley & Sons, New York

10- "Analysis of Structures, Vol.I (Analysis, Design and Details of Structures)", V.N. Vazirani, M.M. Ratwani, S.K. Duggal, 17th Edition, 2005, Khanna Publishers, Delhi.

11- "Analysis of Structures, Vol.II (Theory, Design and Details of Structures)", V.N. Vazirani, M.M. Ratwani, S.K. Duggal, 16th Edition, 2005, Khanna Publishers, Delhi.

saze118.com