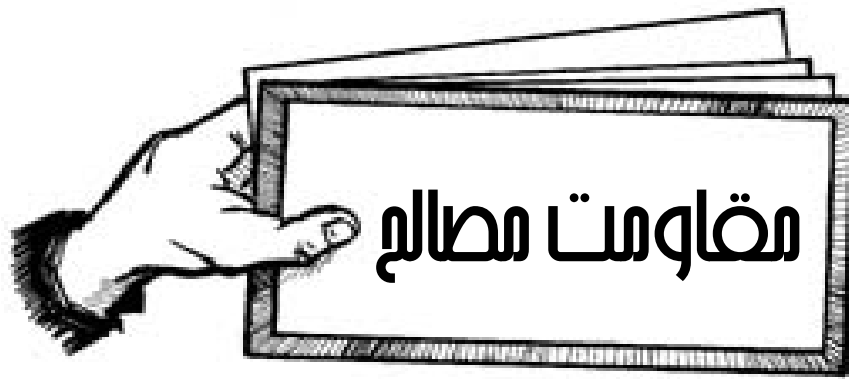


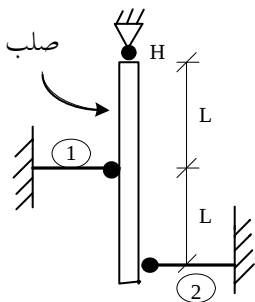


- ابتدا نکات و تست‌هایی از مباحث گذشته:



مثال (کنکور ارشد ۸۰): اگر جنس و طول هر دو میلۀ ۱ و ۲ یکسان باشد و درجه حرارت میلۀ ۱ به اندازه ΔT افزایش یابد،

عکس‌العمل افقی H چقدر است؟



✓ حل با نوشتن معادله تعادل حول نقطه H به دست می‌آید: $F_1 = 2F_2$

پس اگر در اثر تغییر درجه حرارت، در میلۀ ۱، نیروی فشاری F ایجاد شود، در میلۀ ۲ نیروی فشاری $\frac{F}{2}$ خواهیم داشت.

همچنین از سازگاری تغییر مکان‌ها به دست می‌آید: $\Delta_2 = 2\Delta_1$

پس داریم:

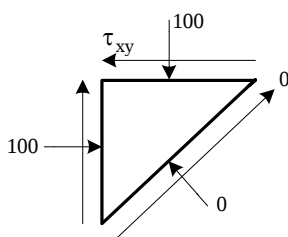
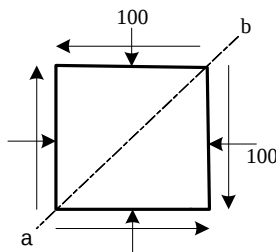
$$\Delta_1 = \alpha L \Delta T - \frac{FL}{EA} \quad \Delta_2 = \left(\frac{F}{2}\right) \frac{L}{EA} \quad \Delta_2 = 2\Delta_1 \Rightarrow \alpha L \Delta T = \frac{FL}{EA} \left(2 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow F = 0.8 AE \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow H_x = \frac{F_1}{2} = \frac{F}{2} = 0.4 AE \alpha \Delta T$$



مثال (کنکور ارشد ۷۹): برای المان مربع شکل روبرو، هر دو تنش محوری و برشی روی صفحه قطری برابر صفر می‌باشد. تنش

برشی چقدر است؟



صلبیت محوری $= EA$

صلبیت پیچشی $= GJ$

صلبیت خمشی $= EI$



نکته: یادمان باشد:

✓ حل مسأله بسیار ساده است و فقط کافی است تعادل نیروها در المان روبرو ارضا شود

$$\sum F_x = \sum F_y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 100$$

۵۰ (۲)

۱) صفر

۱۰۰ (۴)

۳) ۷۵



هر چه صلبیت بالاتر باشد، تغییر شکل متناظر با آن صلبیت کمتر می باشد.

به عنوان مثال برای مقایسه زاویه پیچیدگی دو مقطع تحت اثر لنگر پیچشی کافی است، عکس نسبت صلبیت آنها را به همدیگر به دست

آوریم.

نکته: نسبت مقاومت پیچشی دو مقطع، برابر است با عکس نسبت تنش های برشی آن دو. (البته با لنگرهای مساوی)

مثال (کنکور ارشد ۸۰): دو مقطع جدار نازک بسته داریم که طول ضلع مقطع اول دو برابر ضلع دوم و ضخامت جدار مقطع اول

نصف مقطع دوم می باشد. اگر $\alpha = \frac{\text{مقاومت پیچشی مقطع اول}}{\text{مقاومت پیچشی مقطع دوم}}$ و $\beta = \frac{\text{صلبیت پیچشی مقطع اول}}{\text{صلبیت پیچشی مقطع دوم}}$ باشد. α و β به ترتیب کدامند؟

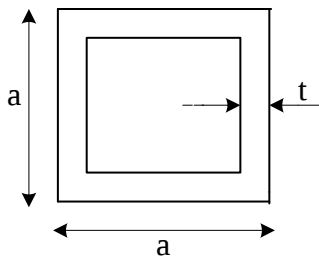
۸ و ۲ (۴)

۲ و ۲ (۳)

۴ و ۲ (۲)

۱ و ۱ (۱)

✓ حل



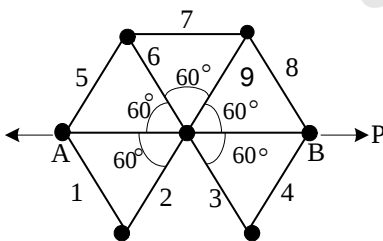
$$\alpha = \frac{\text{مقاومت پیچشی ۱}}{\text{مقاومت پیچشی ۲}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\frac{T}{2A_{m2}t_2}}{\frac{T}{2A_{m1}t_1}} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2} = \frac{2 \times 2 \times A_{m2} \times \frac{1}{2}t_2}{A_{m2} \times t_2} = 2$$

$$\beta = \frac{\text{صلبیت پیچشی ۱}}{\text{صلبیت پیچشی ۲}} = \frac{G_1 J_1}{G_2 J_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\left(\oint \frac{ds}{t}\right)_1}{\left(\oint \frac{ds}{t}\right)_2} = \frac{\frac{(2 \times 2 A_{m2})^2}{4 \times \frac{1}{2}t_2}}{\frac{A_{m2}^2}{4 \times \frac{a}{t_2}}} = 4$$

گزینه ۲ درست است.

مثال (کنکور ارشد ۸۴): در شکل روبرو کلیه میله ها به طول L به سطح مقطع A و مدول ارتجاعی E می باشند. تغییر مکان نسبی A

به B چقدر است؟



$$\frac{2PL}{EA} \quad (2)$$

$$\frac{PL}{EA} \quad (1)$$

$$\frac{11PL}{EA} \quad (3)$$

$$\frac{7PL}{EA} \quad (4)$$

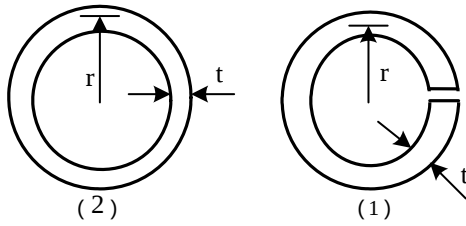
✓ حل شکل در ابتدا کمی شلوغ به نظر می رسد ولی با کمی دقت می توان فهمید که بجز دو میله افقی که نیروی P به آنها وارد می شود

بقیه میله ها صفر نیرویی اند. (برای راحتی تشخیص میله های صفر نیرویی، میله ها شماره گذاری شده اند از میله ۱ شروع کرده و پیش بروید). و

در نتیجه، فقط این دو میله هستند که باعث دور شدن A و B از هم می گردند (طبق $\Delta = \frac{EL}{EA}$) پس داریم:

$$\Delta_{A \rightarrow B} = 2 \times \frac{FL}{EA} \quad (F = P) \Rightarrow \Delta = \frac{2PL}{EA}$$

گزینه ۲ صحیح است.



مثال: اگر در دو مقطع روبرو نسبت $\frac{r}{t} = 10$ باشد مطلوبست

تعیین $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ ؟

✓ حل: مقطع ۱ جدار نازک باز و مقطع ۲ جدار نازک بسته است.

و می دانیم که در مقاطع جدار نازک باز، شکل مقطع مهم نیست و فقط طول مقطع مهم می باشد که در اینجا طول مقطع ۱ برابر $2\pi r$ است و می دانیم که نسبت $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ برابر است با نسبت $\frac{\text{صلبیت پیچشی ۲}}{\text{صلبیت پیچشی ۱}}$.

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{G_2 J_2}{G_1 J_1} = \frac{J_2}{J_1} \quad J_1 = \frac{1}{3} a t^3 = \frac{1}{3} (2\pi r) t^3 = \frac{1}{3} (2\pi \times 10 \cdot t) t^3 = \frac{20\pi}{3} t^4$$

$$J_2 = \frac{A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \times (\pi r^2)^2}{2\pi r} = \frac{4\pi^2 r^4}{2\pi \times 10} = \frac{2\pi \times 10^4 t^4}{10} = 2\pi \times 10^3 t^4 \Rightarrow \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{2\pi \times 10^3 t^4}{\frac{20\pi}{3} t^4} = 300$$

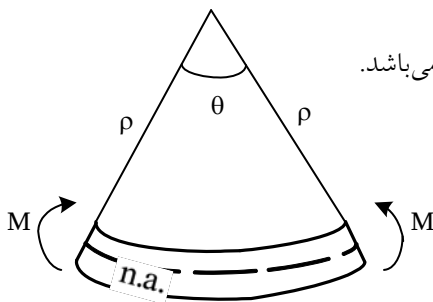
ملاحظه می شود که تحت یک لنگر ثابت، یک مقطع جدار نازک باز ۳۰۰ برابر بیشتر از یک مقطع جدار نازک بسته با ابعاد و مساحت یکسان،

پیچیده می شود. (با نسبت $\frac{r}{t} = 10$)

خمش:

بدون تردید، خمش مهم ترین و پرسؤال ترین مبحث مقاومت مصالح کنکور کارشناسی ارشد عمران می باشد.

یادآوری: خمش خالص

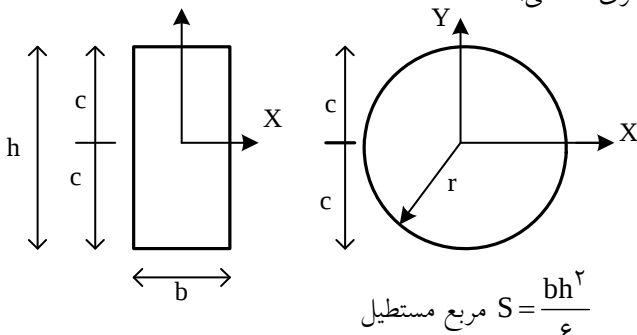


فاصله از تار خنثی
شعاع انحناء ρ
کرنش $\epsilon = -\frac{y}{\rho}$

ثابت می شود: $\sigma = \frac{My}{I}$ که در این رابطه، M لنگر خمشی وارده به مقطع، y فاصله نقطه مورد محاسبه از تار خنثی و I ممان اینرسی می باشد.

بدیهی است طبق رابطه فوق هر چه y بیشتر باشد تنش خمشی بزرگ تر است.

پس σ_{max} در تارهای بالایی و پایینی مقطع اتفاق می افتد. (یکی فشاری و دیگری کششی)



$$\sigma_{max} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{M}{S}, \quad S = \frac{I}{C}$$

- به خاطر داشته باشیم:

$$S = \frac{\pi r^3}{4} \quad \text{دایره}$$

$$S = \frac{bh^2}{6} \quad \text{مربع مستطیل}$$

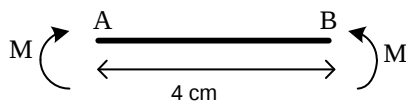
- نسبت مقاومت خمشی دو مقطع برابر است با نسبت مستقیم S های آنها به هم.

- شعاع انحناء:

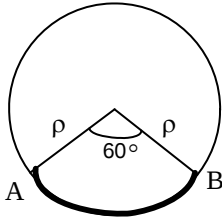
صلبیت خمشی $\rightarrow$
لنگر خمشی $\leftarrow$
$$\rho = \frac{EI}{M}$$



مثال: نوار فلزی به طول 4 m مطابق شکل با لنگر خمشی M به صورت یک قوس 60° از یک دایره درآمده است. تنش خمشی



حداکثر ایجاد شده در آن را حساب نمایید. $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



$$R = \frac{\rho L}{2\pi} = \frac{6 \times 4}{2\pi} = 3.82 \text{ m}$$

شعاع انحنا $\rho =$



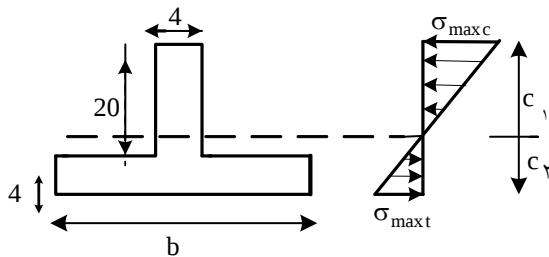
$$I = \frac{10 \times 1^3}{12} = 0.833 \text{ cm}^4$$

$$\rho = R = \frac{EI}{M} \Rightarrow 3.82 \times 100 = \frac{2 \times 10^6 \times 0.833}{M} \Rightarrow M = 4363 \text{ kg.cm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{6 \times 4363}{10 \times 1^2} = 2618 \text{ kg/cm}^2$$



مثال: در شکل مقابل b را طوری تعیین کنید که اگر لنگر خمشی مثبت به تیر وارد شود تنش فشاری max دو برابر تنش کششی

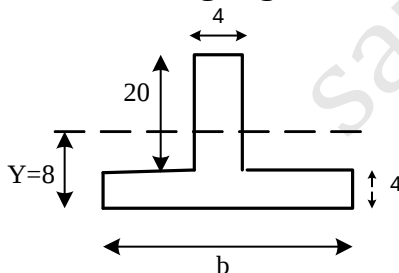


با فرض کردن تار خشی در یک تراز دلخواه، طبق شکل زیر داریم:

$$\frac{\sigma_{\max c}}{\sigma_{\max t}} = 2 = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c_1}{c_2} = 2 \\ c_1 + c_2 = 20 + 4 = 24 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 16, c_2 = 8$$



حال که مقادیر c_1 و c_2 به دست آمد، مقطع باید ابعادی داشته باشد که تار خشی آن (که محور مرکز سطح مقطع می باشد) مرز جدا کننده c_1 و c_2 باشد.



$$\bar{Y} = \frac{(b \times 4) \times 2 + (20 \times 4) \left(\frac{20}{2} + 4 \right)}{b \times 4 + 20 \times 4} = 8 \Rightarrow b = 20$$

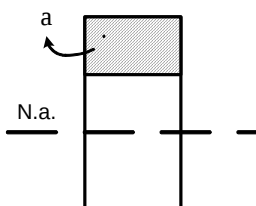


نکته: به طور کلی اگر یک تیر ارتجاعی بر اثر یک بارگذاری دارای شعاع انحنا ρ_1 و در اثر بارگذاری دیگر شعاع انحنا ρ_2 باشد

شعاع انحنا تیر از رابطه زیر به دست می آید: (با فرض $\sigma = E\varepsilon^n$)

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)^n = \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^n + \left(\frac{1}{\rho_2} \right)^n$$

و در صورتی که رابطه تنش-کرنش خطی باشد به رابطه $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ می رسیم.



نکته: در یک تیر تحت اثر خمش خالص نیروی وارد بر یک قسمت از مقطع برابر است با:

$$F = \frac{MQa}{I}$$

(نیروی وارد بر قسمت a از مقطع تیر)



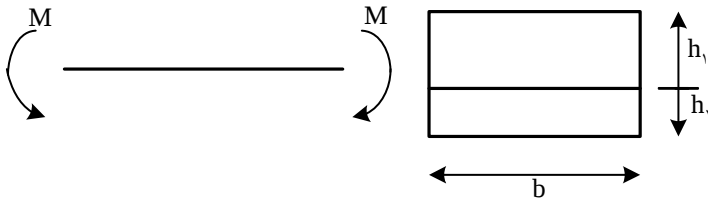
M: ممان خمشی وارده به تیر

Q_a: لنگر استاتیکی اول قسمت a نسبت به تار خشی

I: ممان اینرسی کل مقطع

مثال: تیری با مقطع روبرو تحت خمشی قرار دارد. نسبت تنش خمشی

ماکزیمم تسمه اول به تسمه دوم چقدر است؟



حل پس از خم شدن تیر، شعاع انحناي هر دو تسمه، تقريباً با هم برابر است پس در مورد لنگرهای هر کدام از تسمه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{EI_1}{M_1} = \frac{EI_2}{M_2} \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3$$

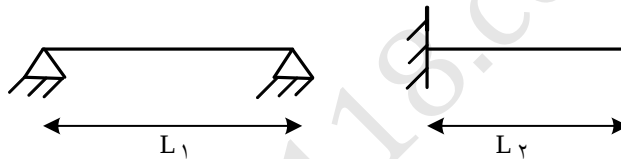
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{M_1}{S_1}}{\frac{M_2}{S_2}} = \frac{\frac{M_1}{h_1^2}}{\frac{M_2}{h_2^2}} = \frac{M_1}{M_2} \times \frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_1^3}{h_2^3} \times \frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_1}{h_2}$$

در مورد نسبت تنش‌های خمشی داریم:



مثال (کنکور ارشد ۷۸): دو تیر شکل روبرو از جنس یکسان و با مقطع یکسان می‌باشند. تنش خمشی آنها بر اثر وزن خود یکی

می‌باشد. نسبت $\frac{L_1}{L_2}$ چقدر است؟



$$I_1 = 2\sqrt{2}L_2 \quad (1)$$

$$I_1 = 2L_2 \quad (2)$$

$$I_1 = L_2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$I_1 = L_2 \quad (4)$$

$$M_1 = \frac{wl_1^2}{8}, \quad M_2 = \frac{wl_2^2}{2}$$



حل ابتدا لنگر خمشی حداکثر را به دست می‌آوریم:

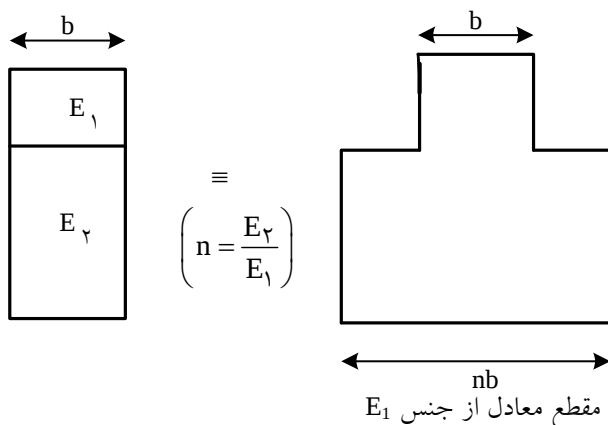
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{M_1}{S_1}}{\frac{M_2}{S_2}} = \frac{\frac{l_1^2}{8}}{\frac{l_2^2}{2}} = \frac{l_1^2}{4l_2^2} = 1 \Rightarrow l_1 = 2l_2$$

با توجه به برابر بودن S_1 و S_2 داریم:

گزینه ۳ صحیح است.

- فمشی تیرهای دو جنسی:

اگر مقطع تیر از دو جنس با مدول یانگ E_1 و E_2 تشکیل شده باشد، می‌توان برای سادگی کار، مقطع را تبدیل کرد به مقطع معادل از جنس اول یا مقطع معادل از جنس دوم. و I و S و... را برای این مقطع جدید محاسبه نمود. فقط باید توجه نمود که، تنش محاسبه شده در قسمت‌های معادل شده مقطع باید در ضریب n (نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ یا $\frac{E_1}{E_2}$) ضرب شود.





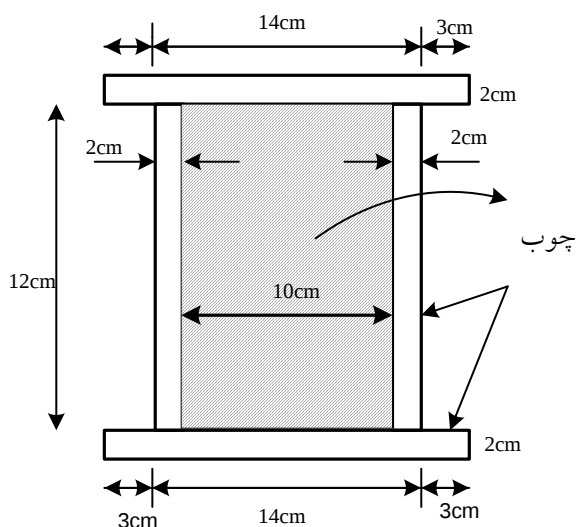
مثال (کنکور ارشد ۷۴): چنانچه مقطع تیری که از فولاد و چوب تشکیل شده است تحت تأثیر لنگر $M = 24 \cdot \text{KN} \cdot \text{m}$ قرار

گیرد، مقدار نیرویی که بال فوقانی تحمل می‌کند، چقدر است؟

$$(E_{\text{چوب}} = 1 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ و } E_{\text{فولاد}} = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2})$$

حل ابتدا مقطع معادل از فولاد را تشکیل می‌دهیم:

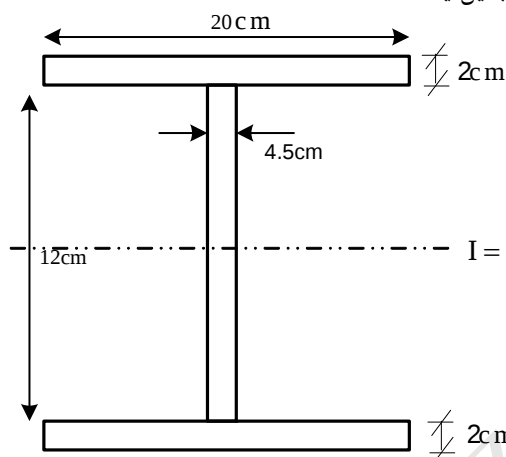
$$n = \frac{E_{\text{چوب}}}{E_{\text{فولاد}}} = \frac{1 \times 10^5}{2 \times 10^6} = \frac{1}{20}$$



$$\Rightarrow \text{ضخامت جان چوب تبدیل یافته} = 10 \cdot \text{cm} \times \frac{1}{20} = 0.5 \cdot \text{cm}$$

(10cm چوب معادل 0.5cm فولاد)

پس مقطع، به شکل روبرو تبدیل می‌شود:



$$I = \frac{4/5 \times 12^3}{12} + 2 \times \left[\frac{20 \times 2^3}{12} + 2 \times 20 \times 7^2 \right] = 4595 \text{ cm}^4$$

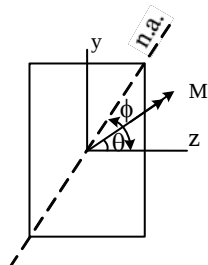
طبق نکته ذکر شده در صفحات قبل:

$$F = \frac{MQ}{I} \text{ بال}$$

$$Q = 2 \times 20 \times 7 = 280 \cdot \text{cm}^3 \Rightarrow F = \frac{MQ}{I} = \frac{(24 \times 100)(280)}{4595} = 1462 \text{ KN}$$

- خمش دوجانبه:

اگر لنگر M وارده به مقطع در راستای یکی از دو محور اصلی مقطع نباشد باید آن را به دو مؤلفه عمود بر هم تجزیه نمود در این حالت داریم:



$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \cdot \tan \theta \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}$$

(θ : زاویه لنگر با محور Z مقطع)

(ϕ : زاویه تار خشی با محور Z مقطع)

- با توجه به رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت:

۱- همواره محور خشی بین بردار لنگر خمشی M و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

۲- اگر در مقطعی $I_z = I_y$ (مثل مقطع مربع و دایره)، $\phi = \theta$ یا به عبارت دیگر در این گونه مقاطع، M در هر راستایی اعمال شود، تار خشی منطبق بر راستای بردار M می‌باشد.



در حالت کلی بارگذاری روی مقطع که نیروی محوری P و لنگرهای خمشی M_y و M_z داریم، تنش برابر است با:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

- هسته مرکزی یک مقطع (kern): مکان هندسی نقاطی که اگر بار روی آنها اعمال شود، کل مقطع یا تحت فشار خواهد بود یا تحت کشش (بسته به فشاری یا کششی بودن بار)

- نکات:

۱- اگر نیرویی روی مرز هسته وارد شود، تنش تنها در یک رأس محیط مقطع صفر خواهد شد ولی اگر نیرو در یکی از رئوس هسته وارد شود تنش در یک ضلع محیط مقطع صفر خواهد شد.

۲- هر چه نیرو به مرکز مقطع نزدیکتر شد، تار خنثی از مقطع دورتر می شود و بالعکس. در دو حالت حدی داریم:

نیرو در بی نهایت ← تار خنثی در مرکز مقطع (خمش محض) و نیرو در مرکز مقطع ← تار خنثی در بی نهایت (تنش محوری خالص)

۳- هسته مرکزی یک ضلعی محدب، همواره یک n ضلعی محدب می باشد.

۴- در چند ضلعی های مقعر کافی است که چند ضلعی محدب محیط بر مقطع را رسم کنیم. هسته مرکزی چند ضلعی محدب جدید به صورت شماتیک بیانگر هسته مقعر می باشد.

۵- هسته مقاطع زیر را به خاطر بسپارید:

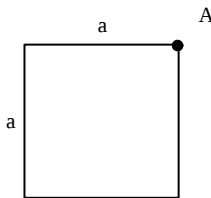
- مستطیل به ابعاد b و h ← لوزی هم مرکز با آن به طول اقطار $\frac{h}{3}$ و $\frac{b}{3}$

- لوزی به اقطار b و h ← مستطیل هم مرکز با آن به طول اضلاع $\frac{h}{6}$ و $\frac{b}{6}$

- مقطع دایره به شعاع r ← دایره هم مرکز با آن به شعاع $\frac{r}{4}$

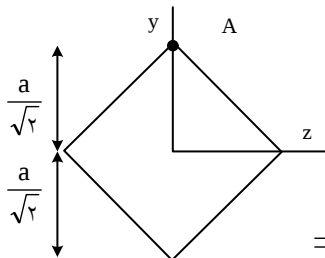


مثال (کنکور ارشد ۸۳): مقطع یک عضو سازه ای مربع مستطیل مطابق شکل می باشد. برآیند تنش ها در مقطع، یک نیروی عمودی فشاری در A می باشد. قدر مطلق تنش فشاری چند برابر تنش کششی است؟



- (۱) $\frac{13}{11}$
(۲) $\frac{2}{2}$
(۳) $\frac{3}{1}$
(۴) $\frac{1}{4}$

حل ✓ می توانیم مقطع را 45° بچرخانیم. (و می دانیم که I مربع حول هر محوری $\frac{a^4}{12}$ است)

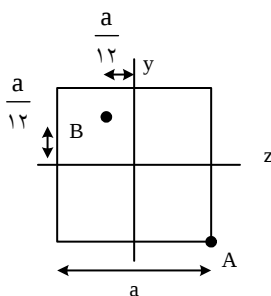


$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{p}{A} \pm \frac{Mc}{I} \quad \left(M = \frac{pa}{\sqrt{2}} \text{ و } c = \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{p}{a^2} + \left(\frac{pa}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\frac{a^4}{12}} = \frac{7p}{a^2} \\ \sigma_{\min} = \frac{p}{a^2} - \left(\frac{pa}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\frac{a^4}{12}} = -\frac{5p}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \right| = 1/4 \Rightarrow \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$



مثال (کنکور ارشد ۷۴): اگر محل اثر متجه نیروی فشاری بر یک فونداسیون مربع شکل در نقطه ای به فاصله $\frac{1}{12}$ ضلع مربع از دو محور تقارن باشد، (B) تنش در کنج ربع مقابل (A) چقدر است؟

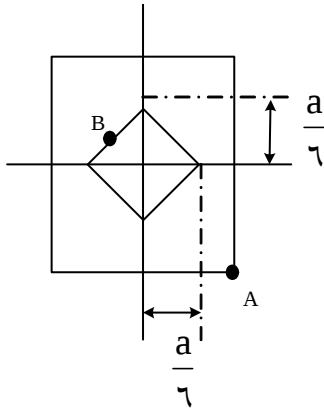


- (۱) $\frac{7p}{a^2}$
(۲) $\frac{p}{a^2}$
(۳) صفر
(۴) هیچ کدام

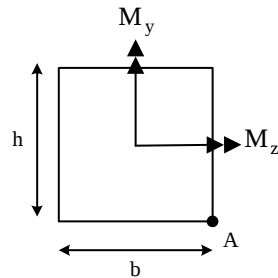


✓ حل می توان معادله تنش را نوشت و مقدار آن را به دست آورد.

اما با کمی دقت در شکل می توان فهمید که نقطه اعمال بار روی یکی از اضلاع هسته مرکزی مقطع قرار دارد. در نتیجه، مقدار تنش در رأس ربع مقابل صفر است. گزینه ۳ صحیح می باشد.



مثال) در یک مقطع مستطیل به ابعاد $b=10\text{cm}$ و $h=15\text{cm}$ ، لنگرهای $M_z = 5\text{t.m}$ و $M_y = 2\text{t.m}$ اثر می کند. معادله محور خشی کدام است؟

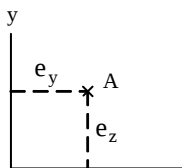


✓ حل از نکات قبلی داشتیم:

$$\frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} \quad (\text{معادله خط محور خشی در حالت خمش دو محوره})$$

$$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{bh^3}{hb^3} \cdot \frac{M_y}{M_z} = \frac{10 \times 15^3}{15 \times 10^3} \cdot \frac{20}{5} = 9 \Rightarrow y = 9z$$

نکته: در بارگذاری کلی که علاوه بر خمش دوجانبه، نیرو هم داریم، معادله خط تار خشی از رابطه زیر به دست می آید:



$$1 + \frac{e_y}{r_y^2} z + \frac{e_z}{r_z^2} Y = 0$$

که در آن:

e_y و e_z : خروج از محوریت بار به ترتیب نسبت به محورهای y و z می باشد.

$$\left(r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \right)$$

r_y و r_z : شعاع ژیراسیون های مقطع می باشند

