# دانشگاه صنعتی امیرکبیر

## دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست



## جزوه درس :

تحلیل سازه ۱

## استاد :

جناب آقای مهندس طاحونی

## نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

**تابستان ۱۳۸۹**

حمید کاظم

« تحلیل سازه »

« جناب آقای مهندس طاحونی »

«بسم الله الرحمن الرحیم»

## فهرست مطالب:

1) تعریف و تشخیص سازه‌ها
2) نیروهای داخلی و رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی
3) خرپاها
4) خطوط تأثیر
5) تغییر شکل سازه‌ها
6) تحلیل سازه‌های نامعین

میان ترم اول خیلی خوب باشی
میان ترم دوم خواب می‌کشد
پایان ترم متوسط

## امتیازات:

1) حل تمرین و کلاس حل تمرین — استاد حل تمرین: آقای اصغری
2) امتحان میان ترم اول
3) امتحان میان ترم دوم
4) امتحان پایان ترم

توجه: در هر گونه امتحانی، حاضر بودن و تیزی هر گونه که نمره از 100 نمره را دارا می‌باشد.

## مآخذ:

1) در زمینه کتب انگلیسی، کتاب‌هایی با عناوین زیر معتبر هستند:

1) Theory of structures 2) Structural analysis 3) Analysis of structures

4) Norris & Wilbur

5) Hillberg Burg (کتاب جدیدی است)

خصوص کتب:

2) جزوه کلاسی
3) کتاب تحلیل سازه‌ها (ابراهیم آبادی - طاحونی)

— مباحث مربوط به جزوه‌های قبلی برای امتحان بعدی حذف نخواهد شد.

فصل اول

« بسم الله الرحمن الرحیم »

حمید کاظم

## کلیات، تشخیص سازه‌ها

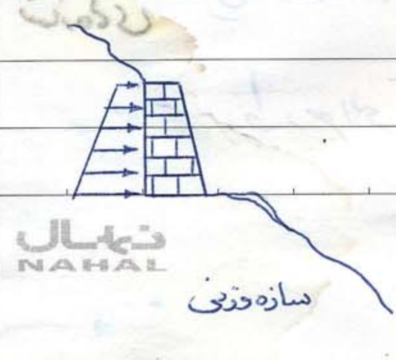
**تعریف سازه:** عضو یا مجموعه‌ای از اعضا می‌باشد که برای تحمل یا انتقال نیرو به کار می‌رود. کلمه فارسی بسیار معمولی است که معادل structure به کار برده می‌شود.

**طبقه‌بندی سازه‌ها:** سازه‌ها را می‌توان با روش‌های مختلفی طبقه‌بندی کرد. ما دنبال طبقه‌بندی خاصی یا آموزشی هستیم. در این درس سازه‌ها را به شکل زیر طبقه‌بندی می‌نماییم.

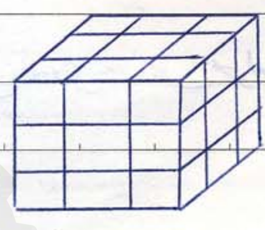
1) سازه‌های وزنی (gravity structures): سازه‌هایی هستند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بار، قائم وزن آن‌هاست.

۲) سازه‌های قاب‌بندی شده (framed structures): سازه‌های قاب‌بندی شده مجموعه‌ای از تیرها، ستون‌ها، اعضای محوری، خمشی و غیره هستند که تشکیل حجم مشخصی می‌دهند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بارهای خارجی نه تنها وزن بلکه به صورت غالب هندسه آن‌هاست. یعنی با دادن هندسه مناسب به مجموعه پایداری آن‌ها افزایش می‌یابد. اکثر ذهنیت ما از سازه‌ها، سازه‌های قاب‌بندی شده است. ساختمان‌های مسکونی، اداری، بناهای یادبود، علائم، سازه‌های هوایی و همه در رده سازه‌های قاب‌بندی شده‌اند. تمرکز اصلی تحلیل سازه‌های ۱ و ۲ سازه‌های قاب‌بندی شده است.

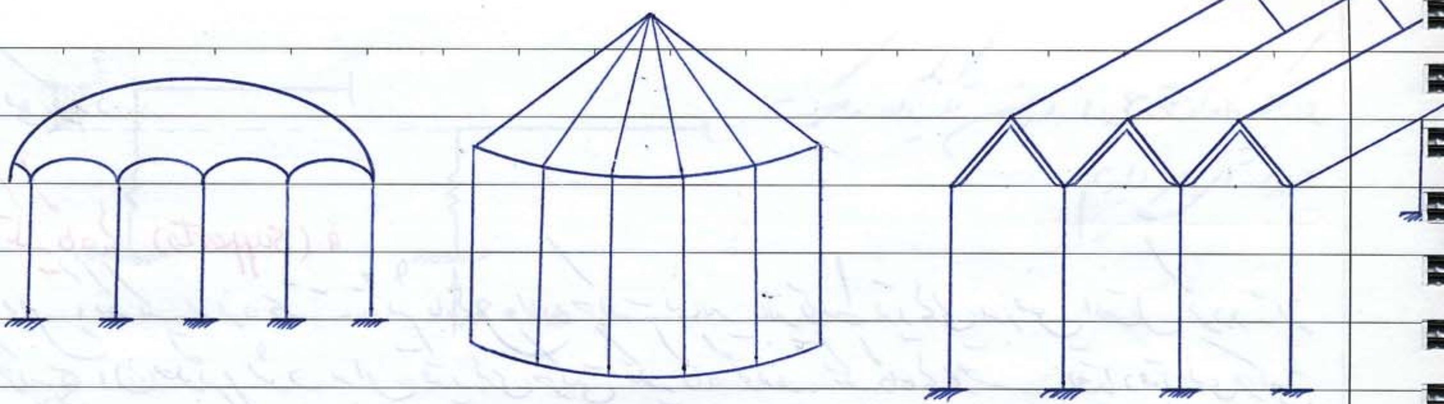
۳) سازه‌های پوسته‌ای (shell structures): عامل غالب در پایداری سازه‌های پوسته‌ای، هندسه آن‌ها می‌باشد. وجه تمایزی که این سازه‌ها با سازه‌های قاب‌بندی شده دارند این است که سازه‌های پوسته‌ای معمولاً از ورق و یا محیط‌های پیوسته‌ای هستند که به آن هندسه خاصی داده شده است. گنبدها، پوشش‌های زین اسبی، ورق‌های تا شده، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی از انواع سازه‌های پوسته‌ای هستند. تحلیل این گونه سازه‌ها که دارای کاربردهای صنعتی و یا معماری هستند، معمولاً در دروس تحلیل صفحه‌ها و پوسته‌ها مورد توجه قرار می‌گیرند.



سازه وزنی



سازه قاب‌بندی شده



سازه‌های پوسته‌ای

**علم تحلیل سازه:** علمی است که در آن رفتار سازه از نقطه‌ای که بار به آن اعمال می‌گردد تا لحظه‌ای که بار به تکیه‌گاه‌ها منتقل می‌گردد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

**هدف از تحلیل سازه:** وقتی که یک سازه‌ای را مورد تحلیل قرار می‌دهیم به دنبال اهداف زیر هستیم.

۱) بررسی پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی
۲) تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی
۳) تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار آن‌ها
۴) محاسبهٔ تغییر شکل سازه

**سازه‌های فضایی (۳ بعدی) و سازه‌های صفحه‌ای (دوبعدی):**

سازه‌های فضایی: همه سازه‌ها ۳ بعدی هستند. یعنی حجمی از فضا را اشغال کرده و در اختیار بهره‌بردار قرار می‌دهند. دسته بسیار بزرگی از سازه‌های ۳ بعدی از نقطه نظر تحلیل قابل تبدیل به مجموعه‌ای از سازه‌های دوبعدی هستند، یعنی می‌توان آن‌ها را با توجه به اطلاعات مربوط به سازه‌های دوبعدی تحلیل نمود. دسته دیگر از سازه‌های فضایی وجود دارند که رفتار آن‌ها قابل تجزیه به رفتار دوبعدی نیست و حتماً باید ۳ بعدی بررسی شود. به این دسته سازه‌ها، سازه‌های فضاکار گویند. پوسته‌ها دسته بسیار مهمی از سازه‌های فضاکار هستند.

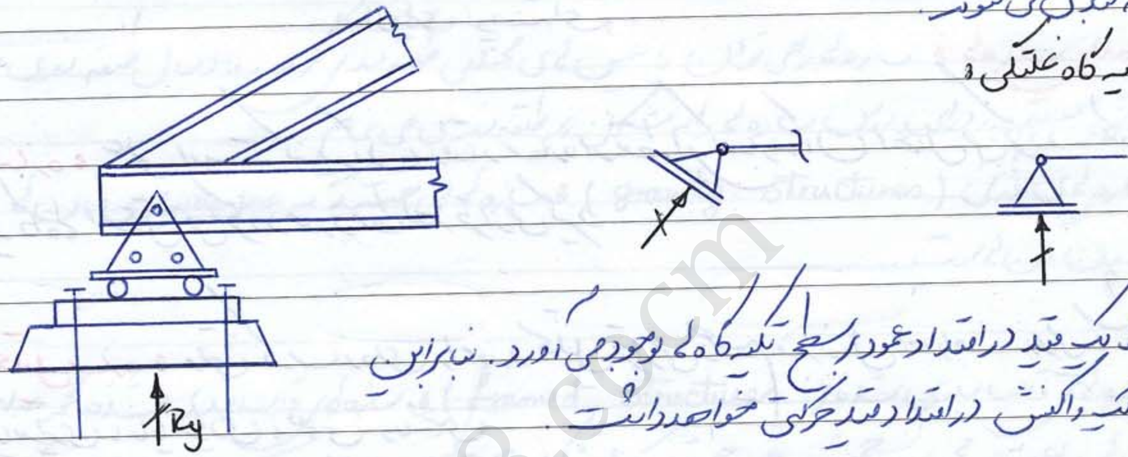
سازه‌های صفحه‌ای: سازه‌هایی می‌باشند که در آن‌ها سازه و بارهای وارد بر آن همگی در یک صفحه قرار دارند. درس تحلیل سازه‌های ۱ اختصاص به سازه‌های قاب‌بندی شده صفحه‌ای دارد. تجربه نشان می‌دهد که اکثر سازه‌های فضایی قابل تحلیل به صورت دوبعدی می‌باشند. وجود بعد سوم در سازه‌های فضایی اصول و روش‌های کار را تغییر نمی‌دهد و فقط به علت وجود بعد سوم عملیات قدری پرحجم و پیچیده

می گردد.

## تکیه گاه ها (Supports):

برای اینکه یک سازه تحت تاثیر بارهای وارده حرکت ننماید باید توسط قیدهایی به زمین اتصال گردد تا از حرکت آن جلوگیری شود. به این قیدهای حرکتی تکیه گاه گویند. تکیه گاه ها برحسب تعداد قیدهای حرکتی طبقه بندی می شوند.

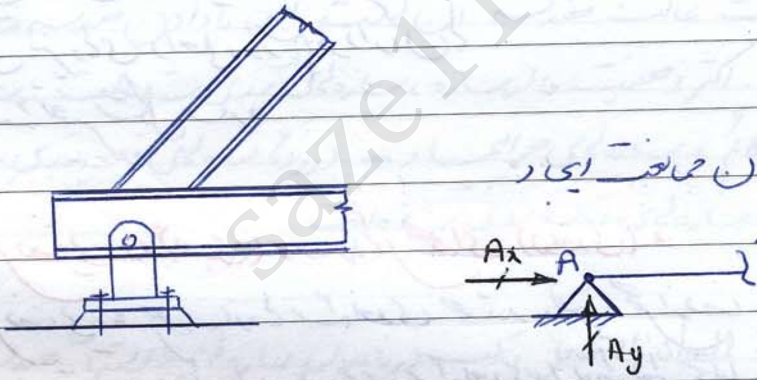
۱) تکیه گاه غلتکی:



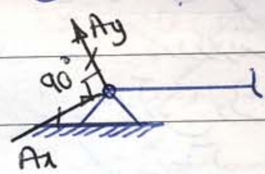

فقط یک قید در امتداد عمود بر سطح تکیه گاه ها بوجود می آورد. بنابراین فقط یک واکنش در امتداد قید حرکتی خواهد داشت.

۲) تکیه گاه مفصلی:

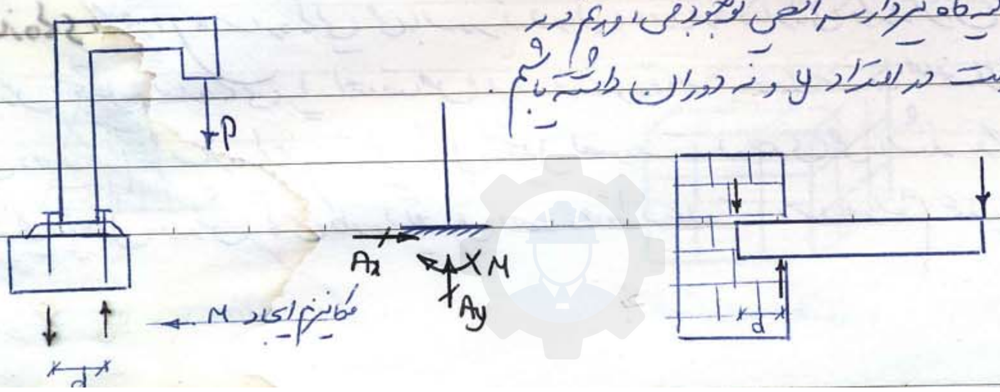
* هر قید خاص در هر امتدادی که در برابر آن حرکت ایجاد کند باعث ایجاد واکنش می شود.



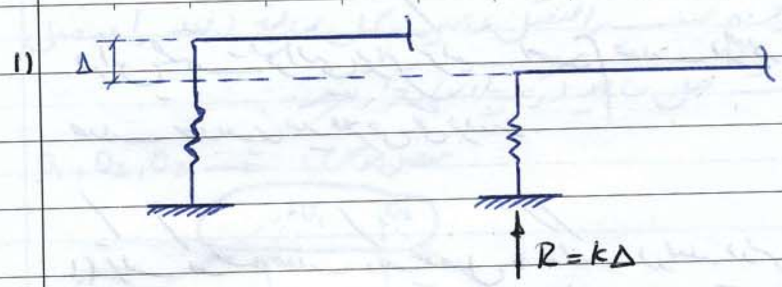

در تکیه گاه مفصلی واکنش های Ax و Ay همواره باید بر هم عمود باشند اما جهت عمودی آن ها می تواند طبق سهولت حل مسئله در نظر گرفته شود.

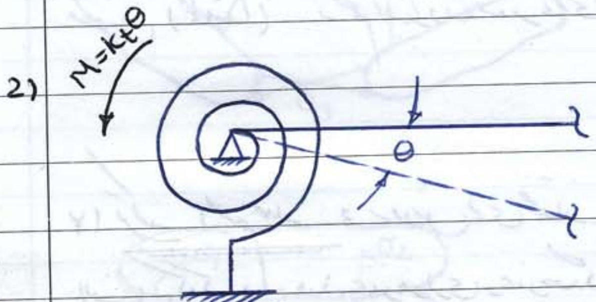



۳) تکیه گاه گیردار: در تکیه گاه گیردار شرایطی بوجود می آوریم که نه حرکت در امتداد x و نه حرکت در امتداد y و نه دوران داشته باشیم.



۴) تکیه‌گاه ارتجاعی: در این تکیه‌گاه ما حرکت در راستای فنر داریم.



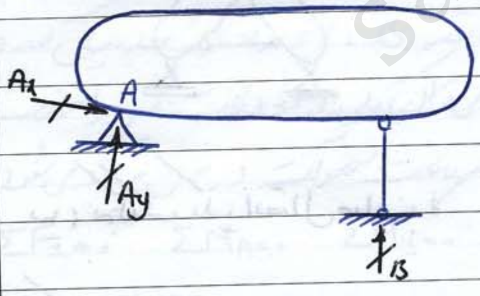




۵) تکیه‌گاه رابط یا میله‌ای (Link): یک عضو دو سر مفصل است که می‌تواند در امتداد محورش تولید واکنش کند.

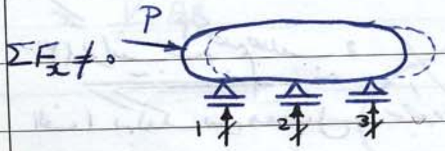
## پایداری جسم صلب در صفحه

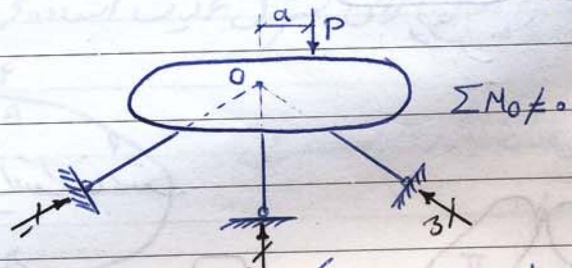
هدف تعیین حداقل مولفه‌ی لازم برای پایداری این جسم صلب در صفحه می‌باشد (جلوگیری از حرکت در اثر اعمال نیرو)

حداقل مولفه‌های لازم برای پایداری جسم صلب در صفحه وجود ۳ عدد مولفه می‌باشد. مشروط بر اینکه:




۱) سه مولفه با هم موازی نباشند.
۲) سه مولفه در یک نقطه همگرا نباشند.
} ناپایداری هندسی



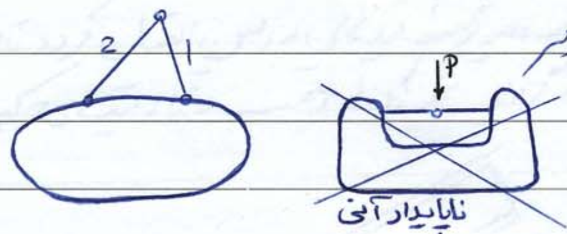

اگر ناپایداری به واسطه وجود تعداد مولفه کمتر از ۳ عدد باشد ناپایداری استاتیکی نام دارد.

* وقتی جسم صلب پایدار است یعنی بر اثر اعمال نیرو جسم تعادل خود را حفظ می‌کند.

## قوانین ترکیب اجسام صلب در صفحه

در این قسمت قوانینی برای ترکیب اجسام صلب در صفحه با حداقل میله‌های لازم بطوریکه ایجاد یک جسم صلب جدید پایدار نیز معرفی می‌گردند.

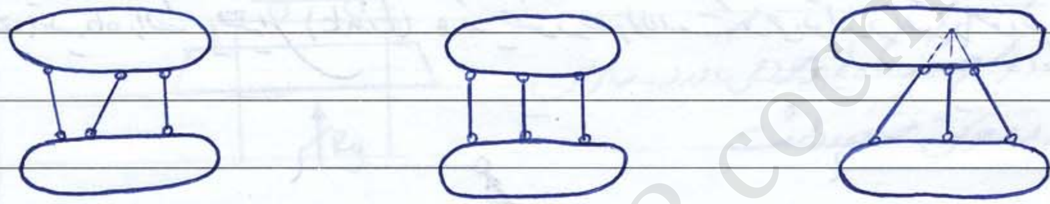
۱) ترکیب یک جسم صلب و یک مفصل: به کمک دو میله دو سر مفصل (link) که هم امتداد نباشند، انجام داد.




ناپایدار آنی

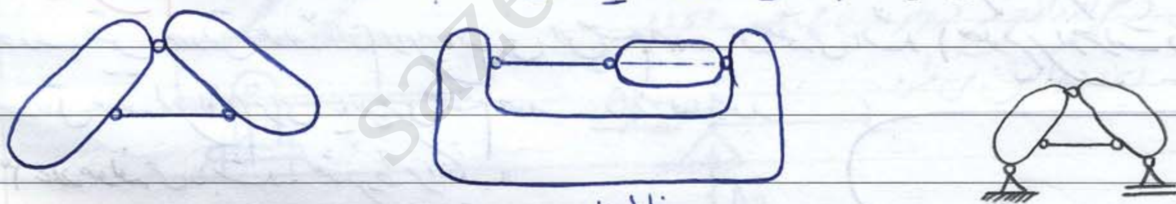
۲) ترکیب دو جسم صلب: به روش‌های مختلف می‌توان این ترکیب را انجام داد.

الف) به کمک سه میله غیر موازی و غیر همگذر:



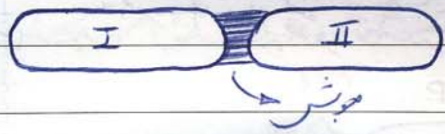
ناپایدار ناپایدار

ب) به کمک یک مفصل و یک میله: بطوریکه مفصل و میله در یک امتداد نباشند.



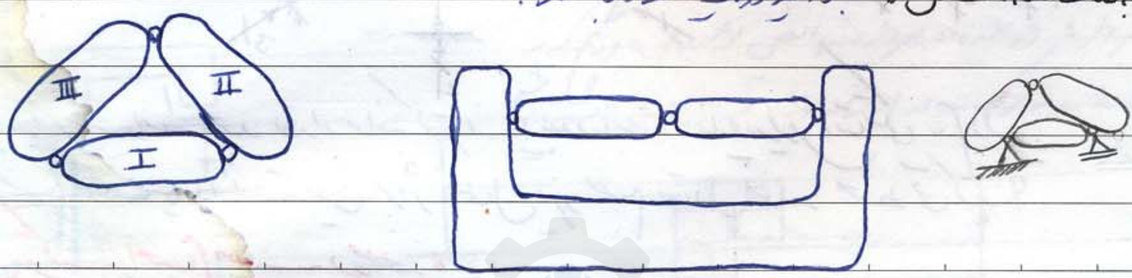
ناپایدار

پ) به کمک یک اتصال صلب:




۳) ترکیب سه جسم صلب:

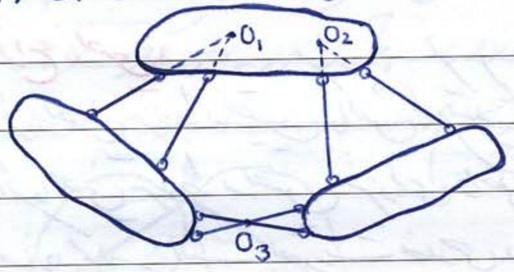
الف) به کمک سه مفصل: بطوریکه در یک امتداد نباشند.

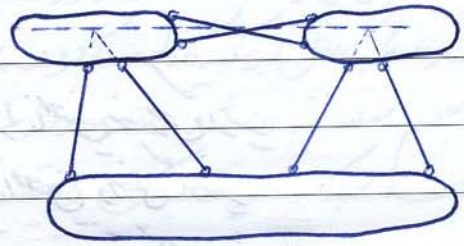



ناپایدار

ب) به کمک شش میله : بطوریکه هر دو میله دو جسم صلب را متصل نمایند. محل تقاطع دو میله را مفصل موهومی گویند. مفاصل موهومی تحت هیچ حالتی نباید در یک امتداد قرار گیرند.

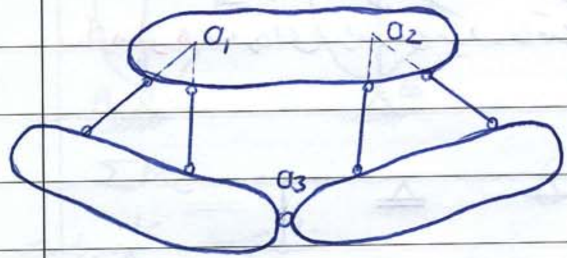
$O_1 , O_2 , O_3 \leftarrow$ مفصل موهومی



ناپایدار

ج) به کمک ترکیبی از مفصل و میله : بطوریکه مفصل های واقعی و موهومی در یک امتداد قرار نگیرند.




## معادلات تعادل استاتیکی - معنی و با معنی :

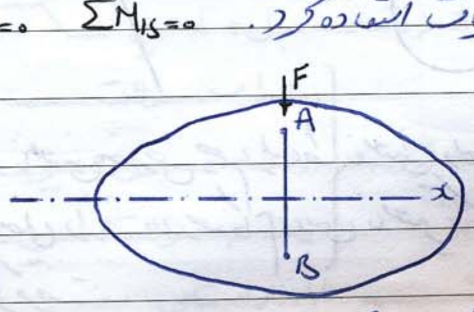
از درس استاتیک می دانیم که برای پایداری یک سازه صفحه ای باید ۳ شرط زیر برقرار باشد. این ۳ شرط در واقع شرط صفر بودن برآیند نیروهای وارد بر جسم صلب است.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases}$$

به معادلات فوق معادلات تعادل در صفحه گفته می شود که تعداد آن ها برابر با ۳ می باشد. نوشتن معادله لنگر نسبت به نقطه جدیدی مانند B ، این معادله جدیدی نبوده و معادله بدست آمده ترکیب خطی از سه معادله قبلی است. اما می توان یکی از معادلات نیرو را حذف کرد و به جای آن معادله لنگر نسبت به نقطه جدید نوشت. این امر باعث سهولت در حل مسئله می شود و یا از معادله چهارم می توان برای کنترل عملیات استفاده کرد.

$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$

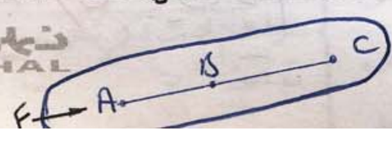
$x \not\perp AB$




در شکل مقابل سه شرط برقرار است ولی تعادل وجود ندارد.

می توان سه شرط را بصورت سه معادله لنگر نوشت در این حالت A و B و C نباید در یک امتداد واقع گردند.

$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$



**معین و نامعین:** اگر بتوان کلیه واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی یک سازه را که معادلات تعادل فوق تعیین نمود، در این صورت سازه معین گفته می‌شود. در غیر این صورت سازه نامعین است.

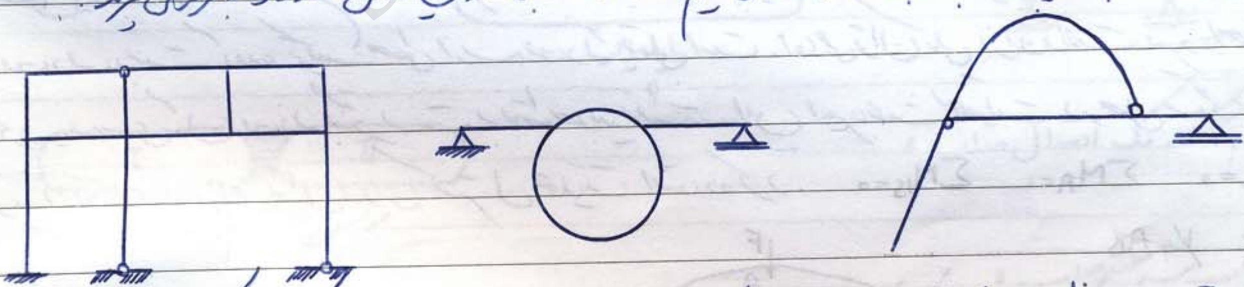
**انواع نامعینی:**

اگر نامعینی مربوط به تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی باشد آن را نامعینی خارجی گویند.
اگر نامعینی مربوط به تعیین نیروهای داخلی باشد آن را نامعینی داخلی گویند.
سازه ممکن است به صورت خارجی و داخلی نامعین به صورت توأم باشد.
از نظر نامعینی خارجی و داخلی سازه‌ها را در دو دسته باز و بسته طبقه‌بندی می‌نمایند.

**سازه باز:** سازه‌ای را باز گویند که فاقد هر گونه کادر یا حلقه باشد.

سازه‌های باز فقط از نظر خارجی بررسی می‌شوند و نامعینی داخلی برای آن‌ها مفهومی ندارد. یعنی اگر یک سازه باز از نظر خارجی معین باشد، از نظر نیروهای داخلی نیز معین است.

**سازه بسته:** سازه‌ای است که دارای یک یا چند حلقه یا کادر بسته باشد. خرپاها و قاب‌ها در این رده از سازه‌ها قرار دارند. بحث خرپاها را بحث خود واگذار می‌کنیم. اما قاب‌ها در این فصل مورد توجه قرار می‌گیرند.

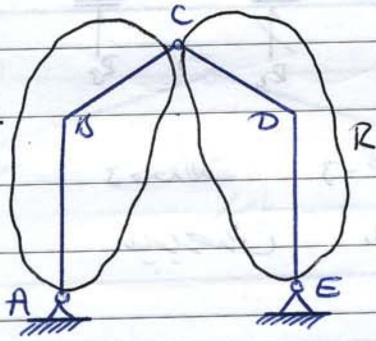


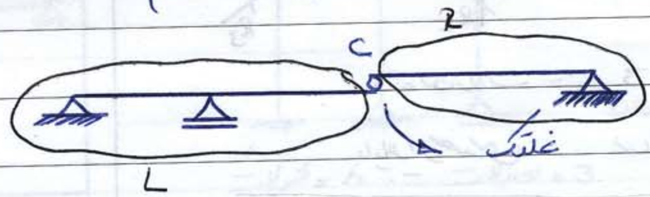
سازه بسته هم از لحاظ نامعینی خارجی و هم از لحاظ نامعینی داخلی باید جداگانه مورد بررسی قرار گیرد. هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی دارد. در هنگام بررسی نامعینی یک سازه بسته باید به تعداد هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی در نظر گرفت.

کادر:

**روابط شرطی:** بیان کردیم که تعداد معادلات تعادل استاتیکی ۳ عدد می‌باشد. در بعضی از سازه‌ها طراح

عدد شرایطی است که می‌نماید یکی از نیروهای داخلی صفر گردد. این شرایط یا خرابیت‌هایی در معادله تعادل مستقل محدودیتی می‌نمایند که باید به معادلات تعادل استاتیکی اضافه گردد. به این معادله **شرطی** گویند.
معادلات شرطی می‌توانند به علت وجود **مفصل داخلی** یا **غلتک داخلی** یا خرابیت مشابه باشند.
اگر یک سازه به طور کامل از یک نقطه‌ای جدا گردد می‌توان به وجود معادله شرطی پی برد. یعنی اگر سازه جدا شده جسم صلب باشد فاقد معادله شرطی است و اگر جسم صلب نباشد، دارای معادله شرطی خواهد بود که باید تعداد آن را تعیین گردید.



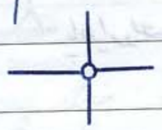




$\sum M_C = 0$ قطعه چپ یا قطعه راست

نقطه C $\sum F_x = 0$

$\sum M_C = 0$ قطعه راست یا قطعه چپ

**توجه:** اگر $m$ عضو در نقطه‌ای به یکدیگر **مفصل** گردند $m-1$ معادله شرطی خواهیم داشت. معادله $m$ ام از تعادل کل سازه به دست می‌آید.



3 معادله شرطی

## تشخیص سازه:

تشخیص سازه به فرآیندی گویند که به کمک آن مشخص می‌گردد سازه پایدار، ناپایدار، معین و یا نامعین است. درصد نامعینی سازه نیز در صورت لزوم تعیین می‌گردد. برای تشخیص سازه‌ها از روش جدولی استفاده می‌گردد.

- تشخیص سازه‌ها
  - سازه‌های باز
    - ۱) ساده: (از یک قطعه تشکیل شده و فاقد معادله شرطی است)
      - کمتر از سه مجهول ← ناپایدار استاتیکی
      - 3 = تعداد مجهول: معین
      - 3 < تعداد مجهول: نامعین
      - (معین / نامعین) ← ناپایداری هندسی تحقیق گردد.
    - ۲) ترکیبی: تعداد روابط = تعداد شرطی + 3 (از ترکیب چند قطعه تشکیل شده و دارای معادله شرطی است)
      - روابط < مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
      - روابط = مجهول: معین
      - روابط > مجهولات: نامعین
      - (معین / نامعین) ← ناپایداری هندسی تحقیق گردد
  - سازه‌های بسته
    - روابط > مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
    - روابط = مجهولات ← معین خارجی و داخلی
    - روابط < مجهولات
      - معین خارجی ـ نامعین داخلی
      - نامعین خارجی ـ معین داخلی
      - نامعین خارجی ـ نامعین داخلی
    - شرط لازم است لیکن کافی نیست. پایداری تدقیق شود.

## مثال

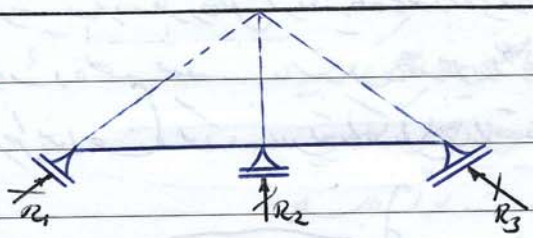
1)

معادلات = 3    مجهول = 2

باز ساده

سازه ناپایدار استاتیکی

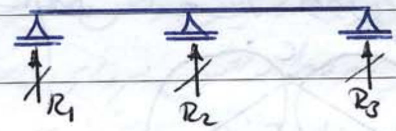
2)



معادلات = 3    مجهولات = 3

ناپایدار هندسی    سازه باز

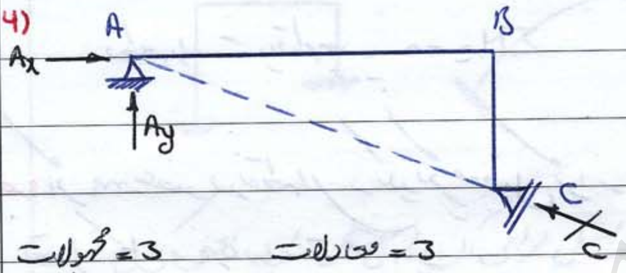
3)



معادلات = 3    مجهولات = 3

ناپایدار هندسی    باز ساده

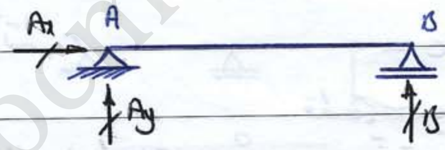
4)



معادلات = 3    مجهولات = 3

ناپایدار هندسی    باز ساده

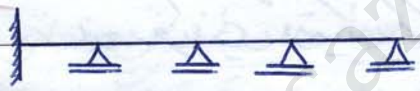
5)



معادلات = 3    مجهولات = 3

پایدار و معین

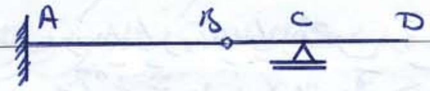
6)



معادلات = 3    مجهول = 7

پایدار و 4 درجه نامعین

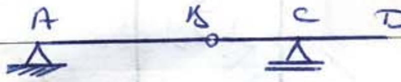
7)



معادلات = 3+1 = 4    مجهولات = 4

سازه پایدار و معین    باز ترکیبی

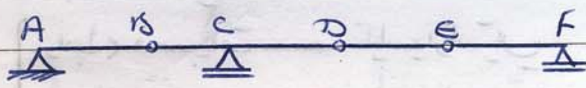
8)



معادلات = 3+1 = 4    مجهولات = 3

سازه ناپایدار استاتیکی    باز ترکیبی

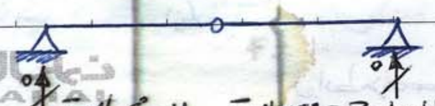
9)



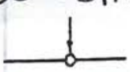
معادلات = 3+3 = 6    مجهولات = 4

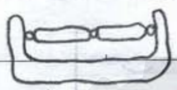
ناپایدار    باز ترکیبی

10)



معادلات = 3+1 = 4    مجهولات = 4



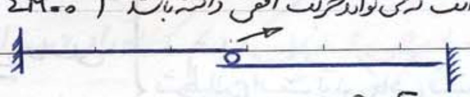


* در هر سازه‌ای سه لولا در امتداد هم قرار بگیرند آن سازه ناپایدار آنی است.

بنابراین استثنائاً ناپایدار است.

* غلتک است که می‌تواند حرکت افقی داشته باشد ( $\Sigma M = 0$ , $\Sigma F_x = 0$ )

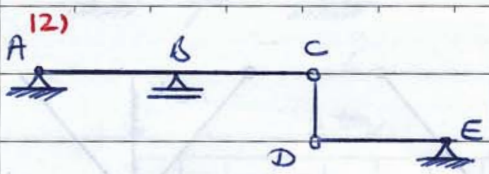
11)



معادلات = 3+2 = 5    مجهولات = 6

پایدار و 1 درجه نامعین

12)




مجهولات = 5

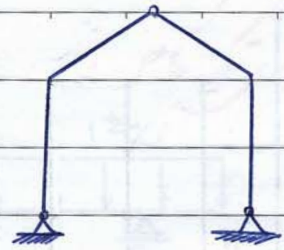
معادلات ایستایی = 3

شرط = 2

5

پایدار و معین

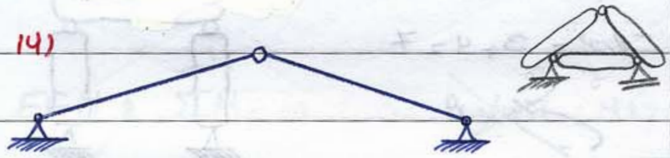
13)



مجهولات = 4

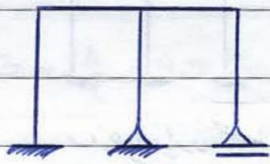
معادلات = 3+1 = 4

14)



پایدار

15)



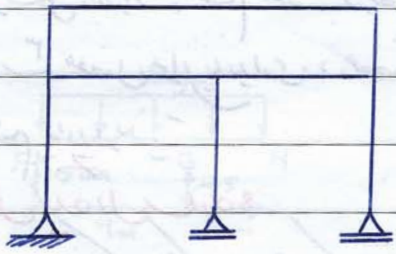
با زساده

مجهولات = 6

معادلات = 3

پایدار و 3 درجه نامعین

16)



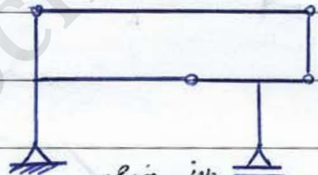
خارجی داخلی

مجهولات = 4 + 3 = 7

معادلات = 3

پایدار و 4 درجه نامعین (1 خارجی + 3 داخلی)

17)



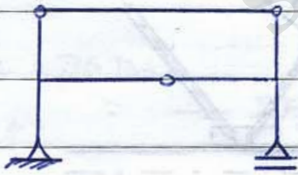
ناپایدار (داخلی)

خارجی داخلی

مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 + 4 = 7

18)

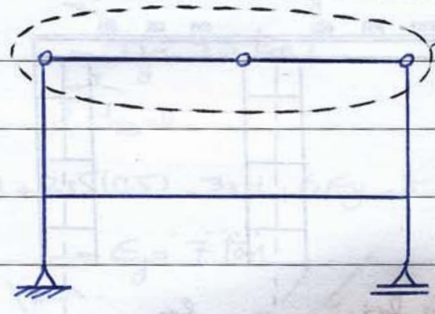


مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 + 3 = 6

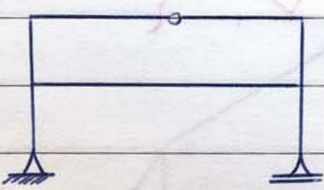
پایدار و معین داخلی

19)



ناپایدار داخلی

20)



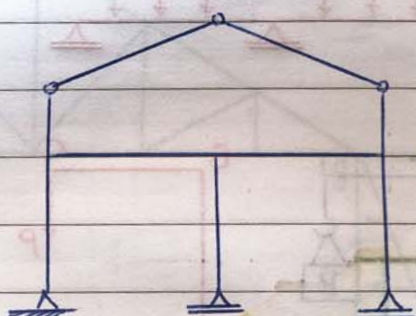
مجهولات = 3 + 3 = 6

ایستایی

معادلات = 3 + 1 = 4

پایدار و 2 درجه نامعین داخلی

21)



مجهولات = 4 + 3 = 7

معادلات = 3 + 3 = 6

پایدار و یک درجه نامعین خارجی

۱) اگر شکل پایین را دو جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود یک مفصل و یک میله برای پایداری فقط یک میله داریم. پس جسم پایدار نیست.

22)

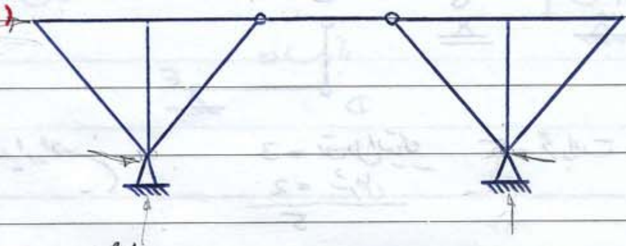
سازه پایدار و نامعین 15 درجه خارجی

42 درجه داخلی

مجهولات $= 6\times3 + 16\times3 = 18 + 48 = 66$

معادلات $= 3 + 6 = 9$

23)



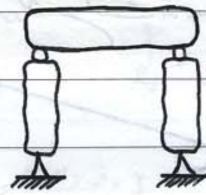
خارجی

مجهولات $= 4 + 12 = 16$

معادلات $= 3 + 4 = 7$

~~9 درجه نامعین~~

ناپایدار

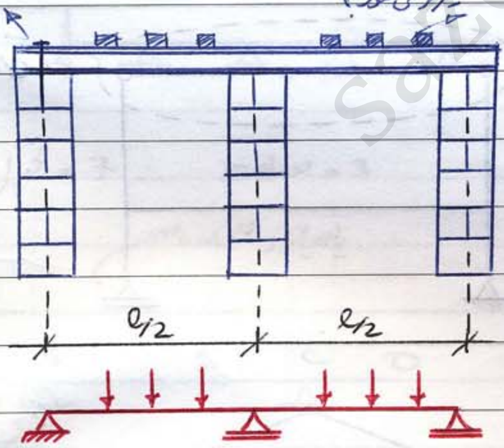


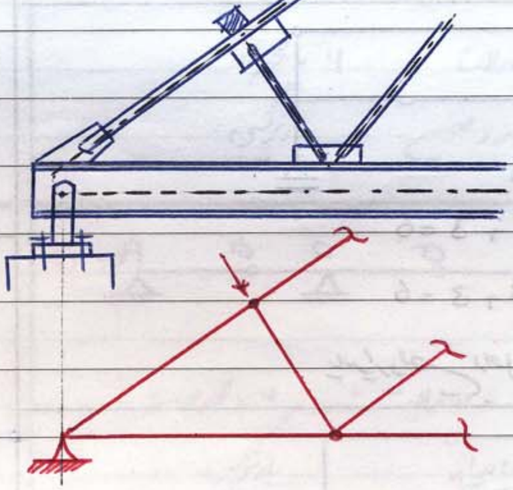
۲) اگر شکل بالا را ۳ جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود ۳ مفصل برای پایداری دو مفصل داریم. پس جسم پایدار نیست.

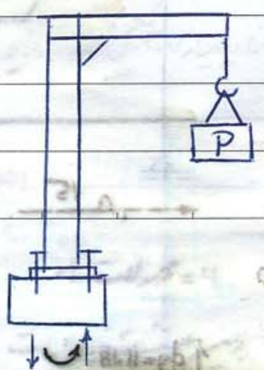
## مدل ایده آل سازه:

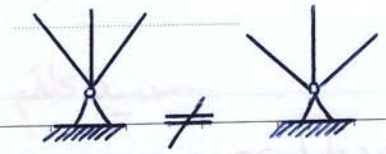
طرح هندسی در ازای یک سازه با یک خط داده می شود خود سازه نیست بلکه مدلی از سازه است که هر چه قدر بارگذاری و رفتار عضو مطابقت داشته باشد مدل سازی دقیق تر بوده و دقت نتایج بیشتر خواهد شد.

برای این منظور چند نمونه کوچک ارائه می شود.

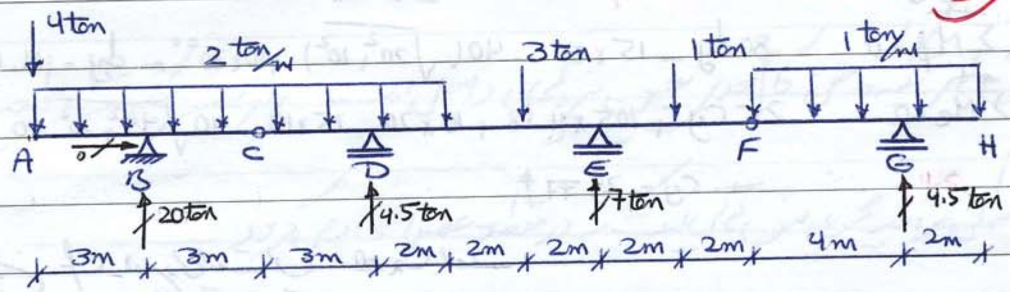




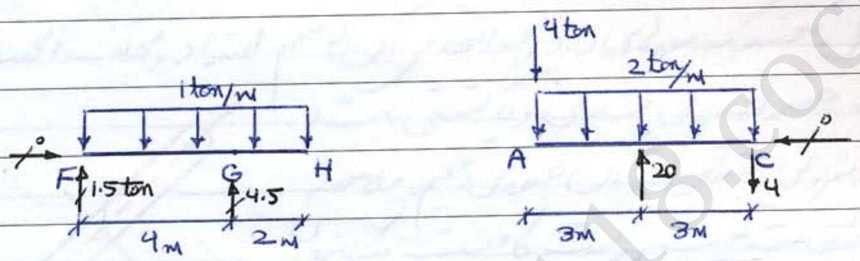
## تعیین واکنش های تکیه گاهی:

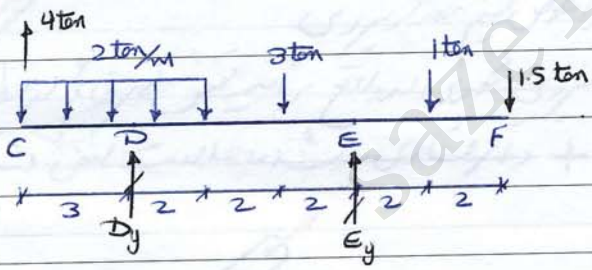



FGH: $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_F = 0 \longrightarrow -6\times3 + 4G = 0 \Longrightarrow G = \frac{18}{4} = 4.5$ ton

کل سازه: $\sum F_x = 0 \longrightarrow B_x = 0$

ABC: $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_C = 0 \longrightarrow -3B_y + 4\times6 + 12\times3 = 0 \Longrightarrow B_y = 20$ ton




CDEF: $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_E = 0$

$-1.5\times4 - 1\times2 + 3\times2 - 6D_y + 10\times6.5 - 4\times9 = 0$

$\longrightarrow D_y = 4.5$ ton $\uparrow$

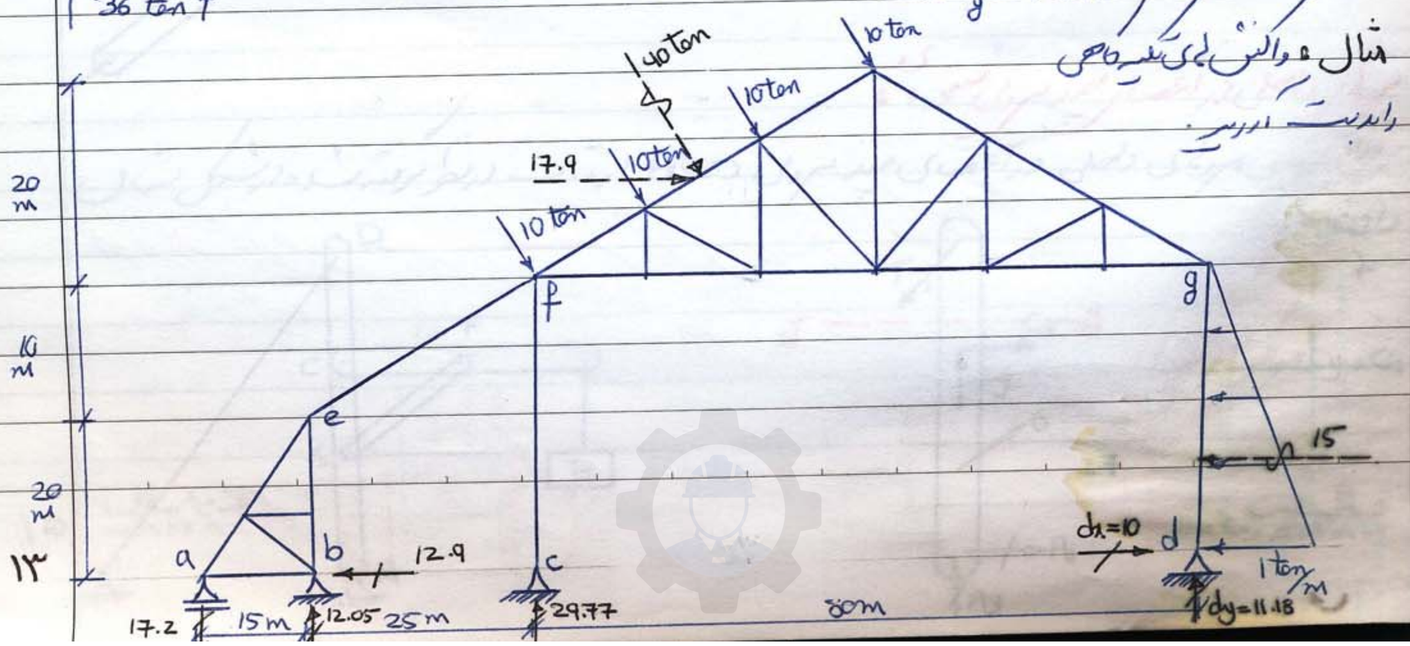
$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_D = 0$

$-4\times3 + 2\times5(0.5) - 3\times4 + 6E_y - 8 - 10(1.5) = 0$

$\longrightarrow E_y = 7$ ton

$\left\{\begin{array}{l} 14 + 22 = 36 \text{ ton} \downarrow \\ 36 \text{ ton} \uparrow \end{array}\right. \longrightarrow \sum F_y = 0$ برقرارست

مثال: واکنش های تکیه گاهی
را بدست آورید.



عضو dg : $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_g = 0$ $\quad 30\,d_x - 15\times 20 = 0 \rightarrow d_x = 10\ \text{ton}$

عضو fgd : $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_f = 0$ $\quad 80\,d_y - 15\times 20 - 40\left(\sqrt{20^2+10^2}\right) + \cancel{10\times 30} = 0 \rightarrow d_y = 11.18\ \text{ton}$

عضو efgd : $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_e = 0$ $\quad 25\,C_y + 105\times 11.18 + 10\times 20 - 15\times 10 - 40\sqrt{45^2+20^2} = 0$

$\rightarrow C_y = 29.77 \uparrow$

چون cf نیرویی است پس $C_x = 0$ است.

کل سازه : $\sum F_x = 0 \rightarrow -b_x - 15 + 10 + 17.9 = 0 \Rightarrow b_x = 12.9$

عضو abe : $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_e = 0 \rightarrow 12.9\times 20 = 15a_y \rightarrow a_y = 17.2 \downarrow$

کل سازه : $\sum F_y = 0 \rightarrow 11.18 - 35.8 + 29.77 + b_y - 17.2 = 0 \rightarrow b_y = 12.05$

فصل دوم:

حمید کاظم

# تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار تغییرات آن‌ها در طول عضو

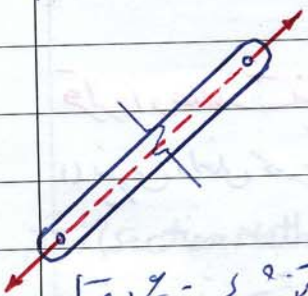
بعد از تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی گام بعدی تعیین نیروهای داخلی است. برای این کار ابتدا با طبیعت نیروهای داخلی آشنا می‌شویم.

به طور کلی نیروی داخلی برآیند مجموعه تنش‌هایی است که در مقطع عضو ایجاد می‌گردد.

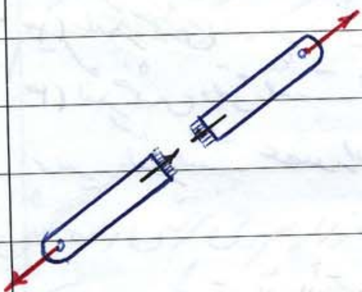
## نیروی داخلی اعضای دونیرویی:

اعضای دونیرویی اعضای مستقیمی می‌باشند که دو انتهای آن‌ها مفصلی است و فقط از طریق دو انتهای یک نیروهای خارجی قرار می‌گیرند. نمونه‌ای از اعضای دونیرویی اعضای موجود یک خرپا می‌باشد. از اعضای دونیرویی ممکن است در قاب‌ها نیز استفاده گردد.

اعضای دونیرویی وقتی در حال تعادل هستند که نیروهای وارد بر دو انتهای آن‌ها هم امتداد و مختلف الجهت باشند. در این حالت ممکن است عضو دونیرویی فشاری و یا کششی باشد.

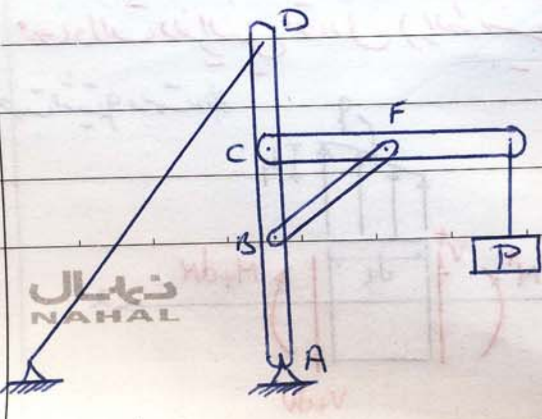


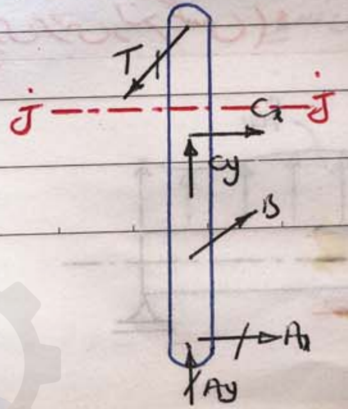
برای تعیین نیروی داخلی در عضو دونیرویی مقطعی از آن عبور می‌دهیم. ملاحظه می‌شود برای حفظ تعادل هر کدام از قطعات جدا شده لازم است که یک نیروی محوری در محل قطع شده داشته باشیم. اگر محل مقطع را عوض کنیم مقدار نیروی محوری تغییر نمی‌کند و در طول عضو ثابت است. این نیروی محوری در واقع برآیند تنش‌های قائم در مقطع می‌باشد. معمولاً قرارداد که کششی باشد با علامت + و اگر فشاری باشد با علامت منفی (−) در نظر گرفته می‌شود.



## نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی صفحه‌ای:

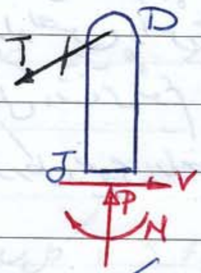
برای بررسی نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی ABCD از قاب در نظر گرفته شده در شکل نشان داده می‌شود.




$C_x$ و $C_y$ واکنش‌های اتصال

برای مطالعه نیروهای داخلی مقطعی مانند J از آن عبور داده، نمودار آزاد DJ را رسم می‌کنیم.




در این نمودار آزاد برای حفظ تعادل نیروها در امتداد قائم نیاز به نیروی داخلی محوری P می‌باشد. برای تعادل در امتداد افق نیاز به نیروی برشی داخلی V می‌باشد و برای تعادل لنگر وجود لنگر خمشی M لازم است.

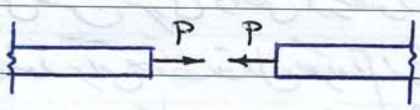
در اعضای چند نیروی صفحه‌ای در حالت کلی وجود این ۳ نیروی داخلی لازم است. از طرف دیگر با تغییر مقطع J مقدار نیروهای داخلی نیز تغییر می‌کند حتی ممکن است جهت‌شان نیز عوض گردد. پس برای طراحی لازم است نمودار تغییرات آن‌ها در طول عضو رسم گردد.

P: نیروی محوری داخلی = تلاش محوری

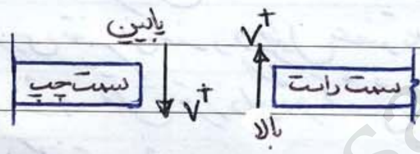
V: نیروی برشی داخلی = تلاش برشی

M: لنگر خمشی داخلی = تلاش خمشی

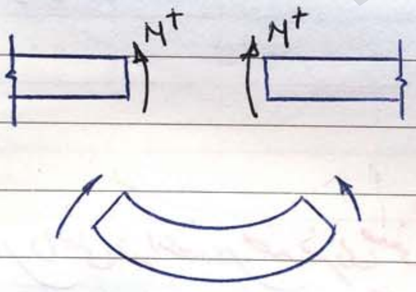
## قرارداد علامت نیروهای داخلی:




۱) نیروی داخلی محوری P وقتی مثبت است که کششی باشد.



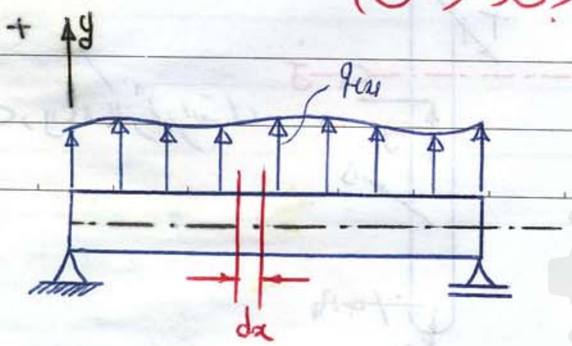

۲) نیروی برشی وقتی مثبت است که در قطعه سمت چپ به سمت پایین و در سمت راست به سمت بالا باشد.

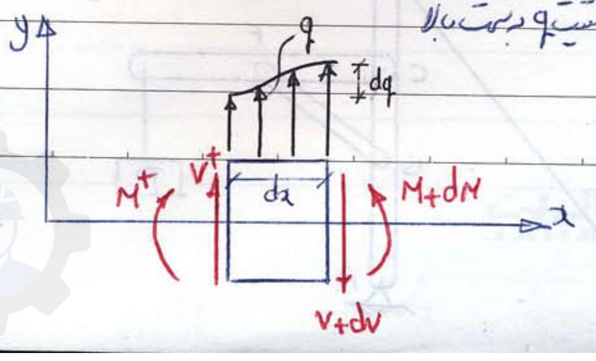



۳) لنگر خمشی وقتی مثبت است که در تارهای پایینی ایجاد کشش نماید. لنگر مثبت عضو را به صورت کاسه‌ای درمی‌آورد.

## معادلات دیفرانسیل تعادل (روابط بین بارگذاری، نیروی برشی و لنگر خمشی):

* جهت مثبت q به سمت بالا



$$\sum F_y = 0 \uparrow^{+} \implies V - (V + dV) + q\,dx + dq\,dx\,\tfrac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow -dV + q\,dx = 0 \rightarrow q(x) = \frac{dV}{dx}$$

شیب نمودار برش برابر شدت بار وارده است.

$$\int_C^D q(x)\,dx = \int_C^D dV \implies V_D - V_C = \int_C^D q\,dx \qquad (V_2 - V_1 = \int q\,dx)$$

تغییرات برش بین دو نقطه C و D برابر است با بار وارده بین دو نقطه C و D (مقدار بار وارده)

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = 0 \implies -M + (M + dM) - (V + dV)\,dx + q\frac{(dx)^2}{2} + \frac{1}{2}\,dq\,dx\cdot dx\,\frac{2}{3} = 0$$

$$\rightarrow dM - V\,dx + (dx)^2 dV = 0 \rightarrow V(x) = \frac{dM}{dx}$$

شیب نمودار لنگر خمشی برابر نیروی برشی در هر مقطع می باشد.

$$\int_C^D V(x)\,dx = \int_C^D dM \implies M_D - M_C = \int_C^D V\,dx \qquad (M_2 - M_1 = \int V\,dx)$$

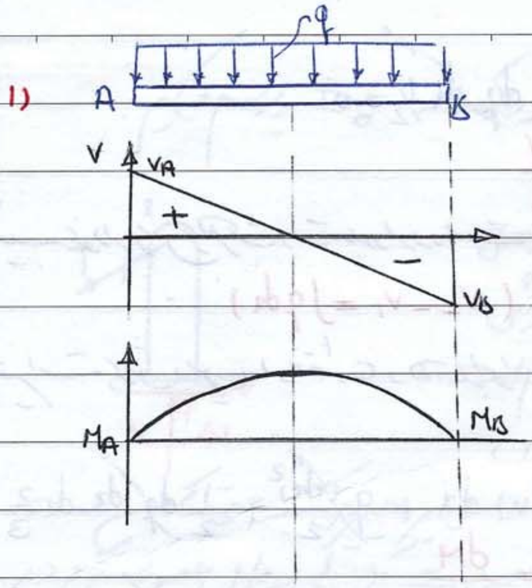
تغییرات لنگر خمشی بین دو نقطه C و D برابر با سطح زیر نمودار برش بین دو نقطه C و D.

## رسم نمودار تغییرات نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری:

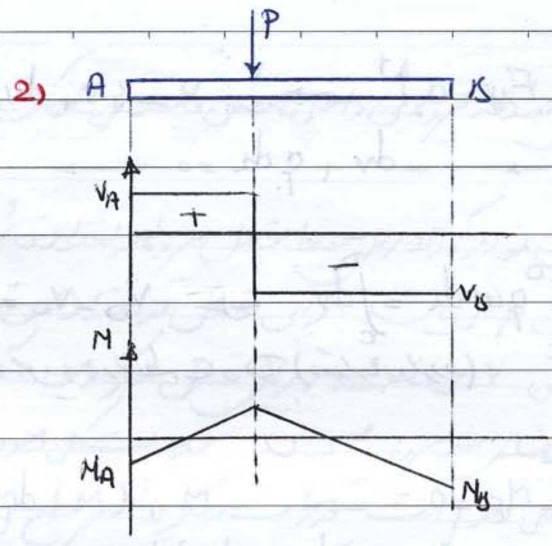
۱) ساده ترین روش برای رسم نمودار تغییرات نیروهای داخلی روش مقطع زدن (Section Method) است. در این روش در محل مورد مطالعه مقطعی عبور داده شده و نیروهای داخلی در جهت مثبت نشان داده روی آن نمایش داده می شوند. معادلات تعادل برای قسمت جدا شده نوشته نیروهای داخلی محاسبه می گردد. این روش در اینجا مورد بحث قرار نگرفته و در مثال هایی که در آن مورد نیاز است آن را مورد توجه قرار می دهیم.

۲) روش جمع زدن (Summation Method): در این روش برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی از معادلات دیفرانسیل تعادل و نتایج حاصل از آن استفاده می شود. روش کاربردی است و در مثال های این فصل بیشتر از آن استفاده خواهد شد. توجه شود که نیروی محوری کماکان با روش مقطع زدن بدست می آید.

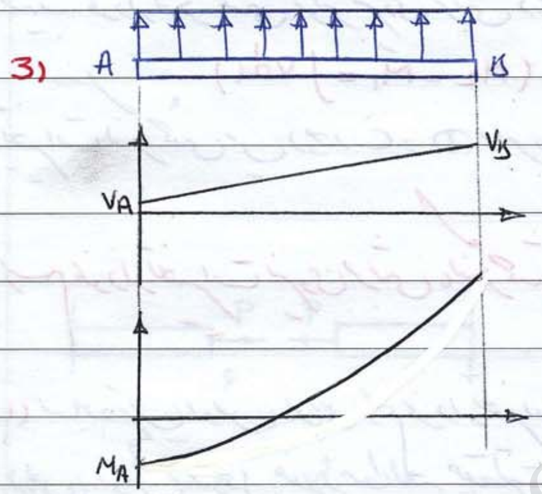
1)



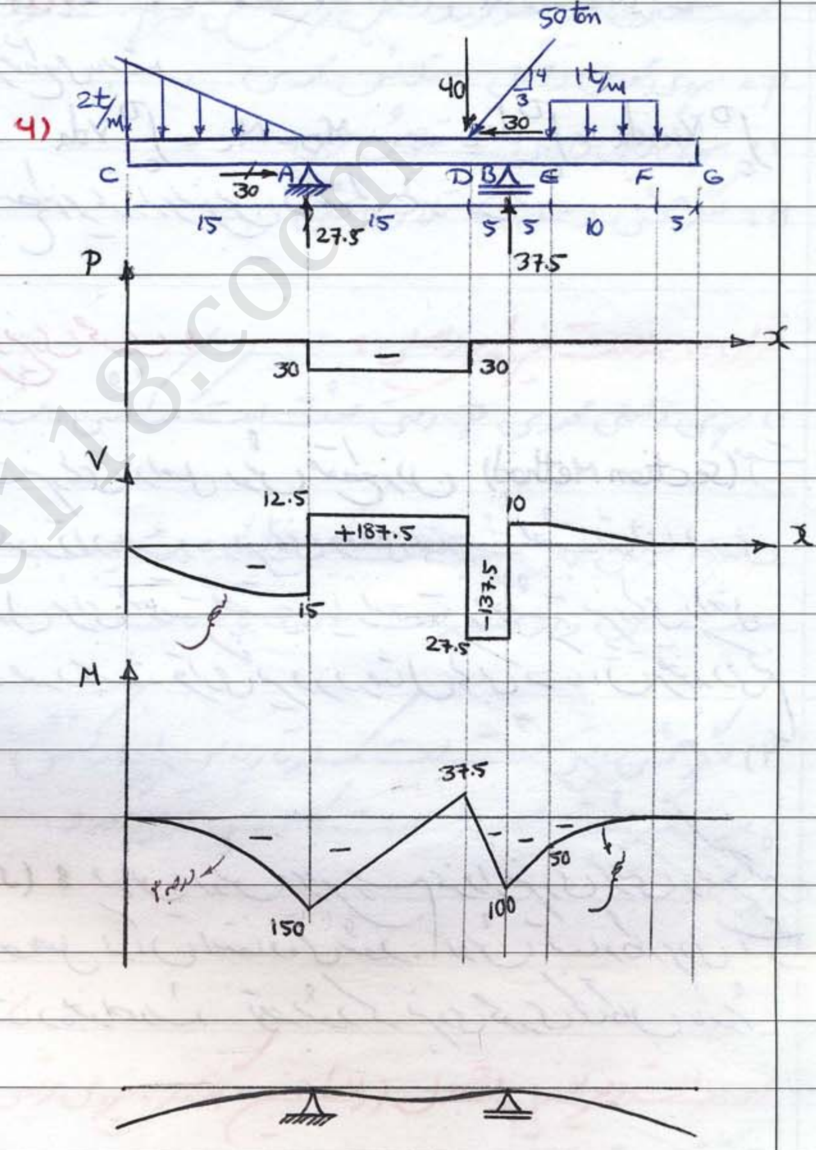

2)




3)



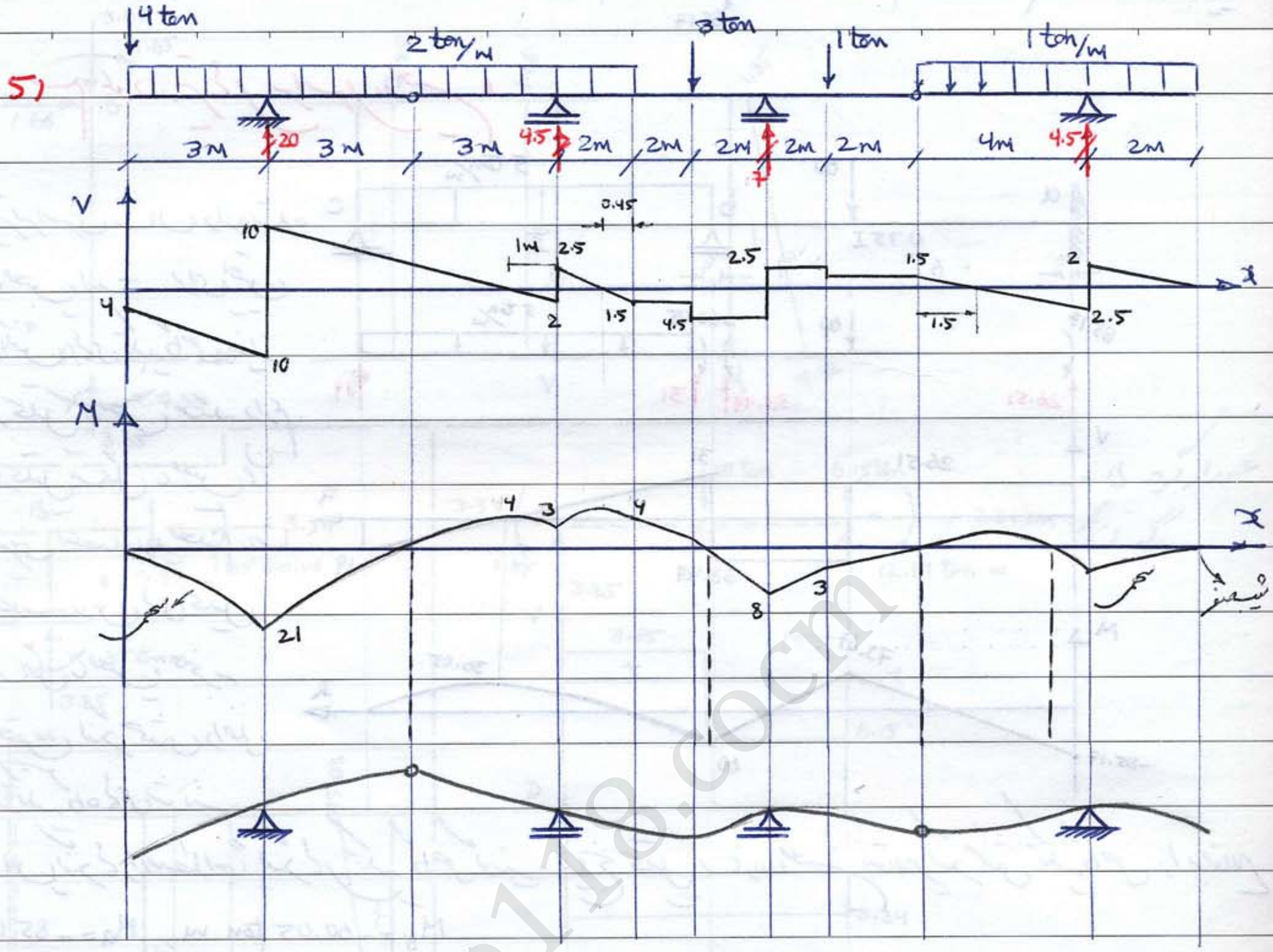

4)



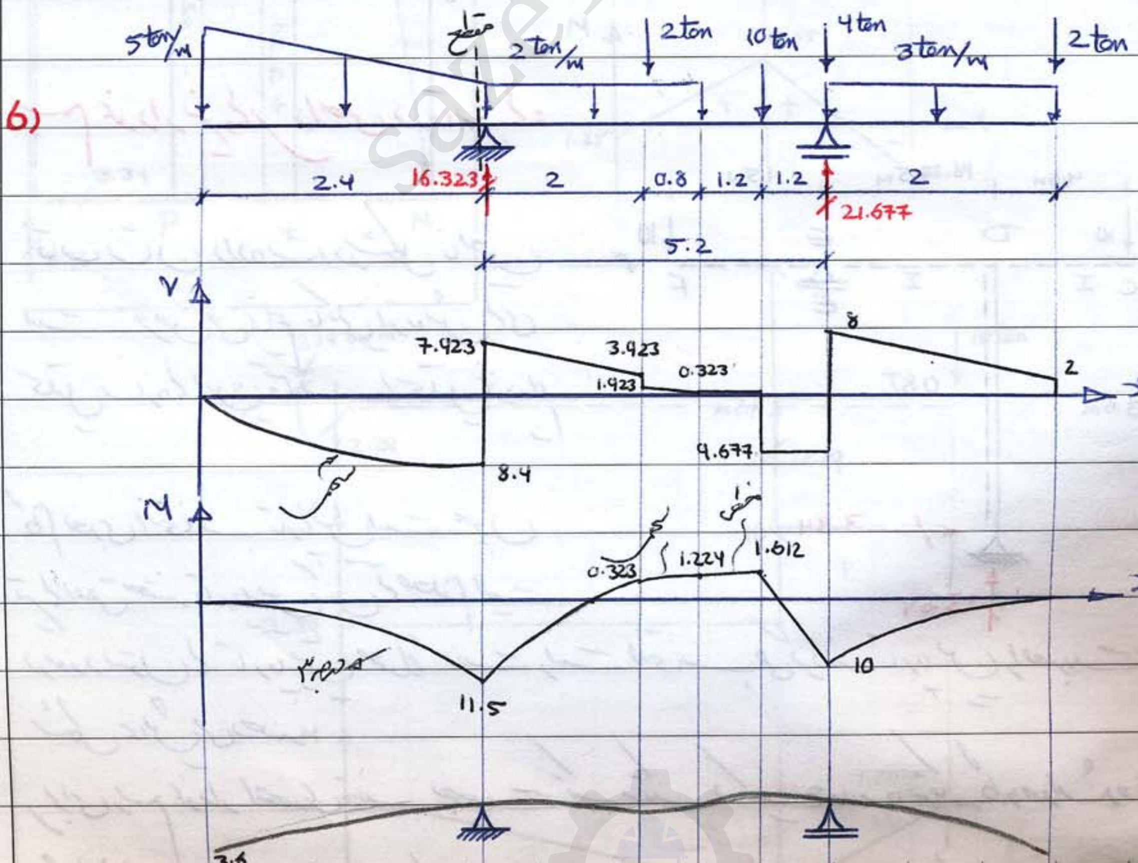

نکته ۶: در هنگام رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی همواره تمام نیروهای خارجی بایستی مولفه‌هایی در امتداد عمود و در محور عضو تجزیه گردند.

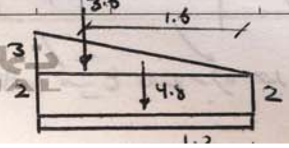
مفصل داخلی تأثیری در نمودار برش ندارد اما در خمش صفر است.

5)




6)

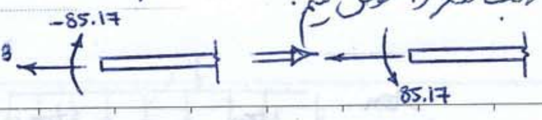


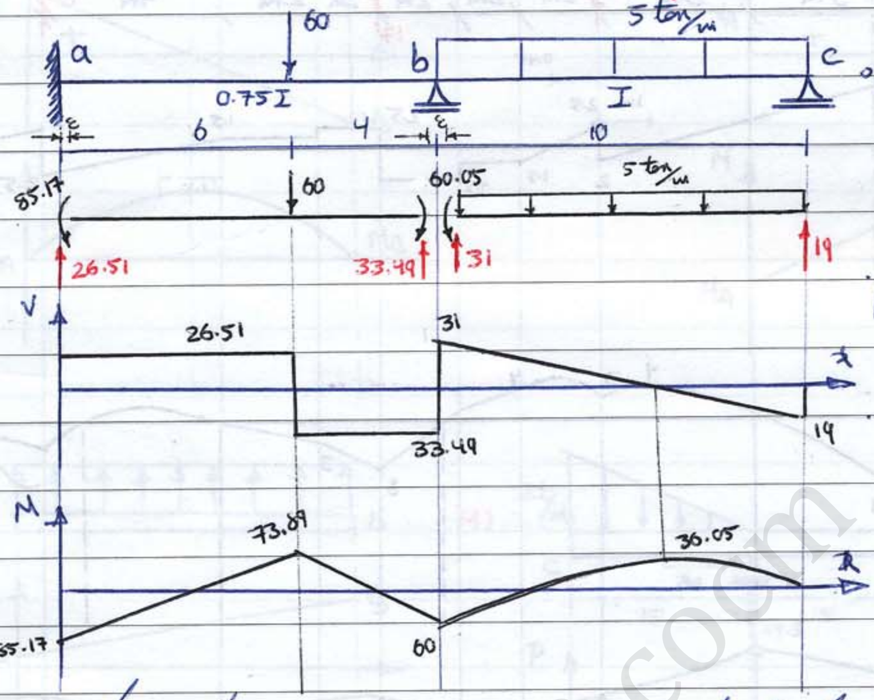

$M = 4.8 \times 1.2 + 3.6 \times 1.6 = -11.5$

اگر لنگر خمشی داخلی داده شد در نقطه مورد نظر مقطع می زنیم و جهت قراردادی لنگر را رسم می کنیم و سپس عدد را بر روی جهت قراردادی قرار می دهیم. اگر عدد لنگر منفی بود می توانیم جهت لنگر را عوض کنیم.

مثال پایین (نقطه a)




## رسم نمودار تیرهای سراسری نامعین

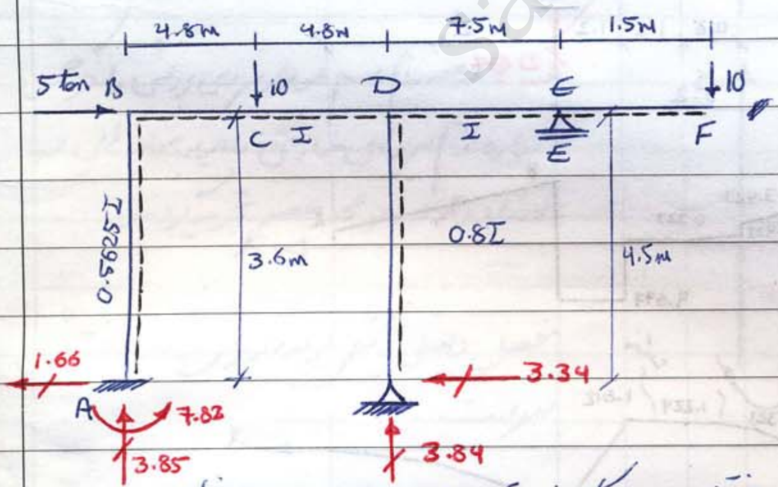



تیر سراسری نشان داده شده نامعین است. برای تعیین واکنش های تکیه گاهی نیاز به تحلیل نامعین مسئله داریم. در تحلیل مسائل نامعین ممان اینرسی اعضا باید معلوم باشد. اغلب روش های تحلیل مسائل نامعین منجر به تعیین لنگر خمشی داخلی در تکیه گاه ها می شوند.

این لنگرها را اصطلاحاً لنگرهای تکیه گاهی گویند. نتایج تحلیل سازه نامعین مقادیر لنگر خمشی تکیه گاهی را به صورت مقابل

$M_b = -60.05$ ton.m , $M_a = -85.17$ ton.m

## رسم نمودار نیروهای داخلی در قاب ها



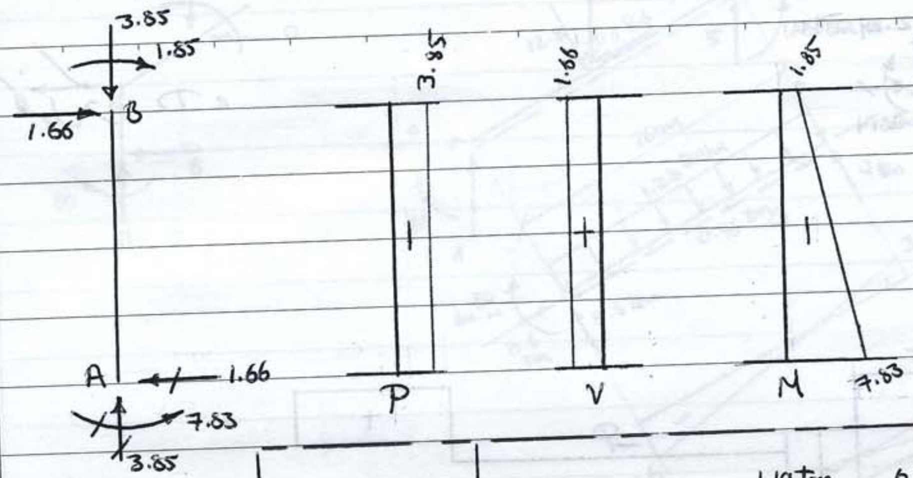

قاب نشان داده شده در شکل نامعین است. فرض می کنیم با یکی از روش های تحلیل سازه های نامعین این قاب را تحلیل نموده ایم.

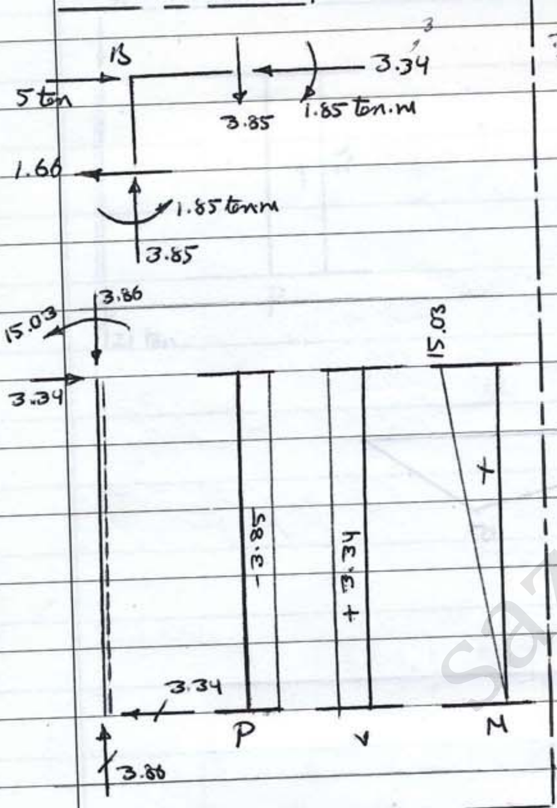
گام بعدی انتخاب تار پایین است. چون تیرها افقی هستند تار پایین آن ها معلوم است.

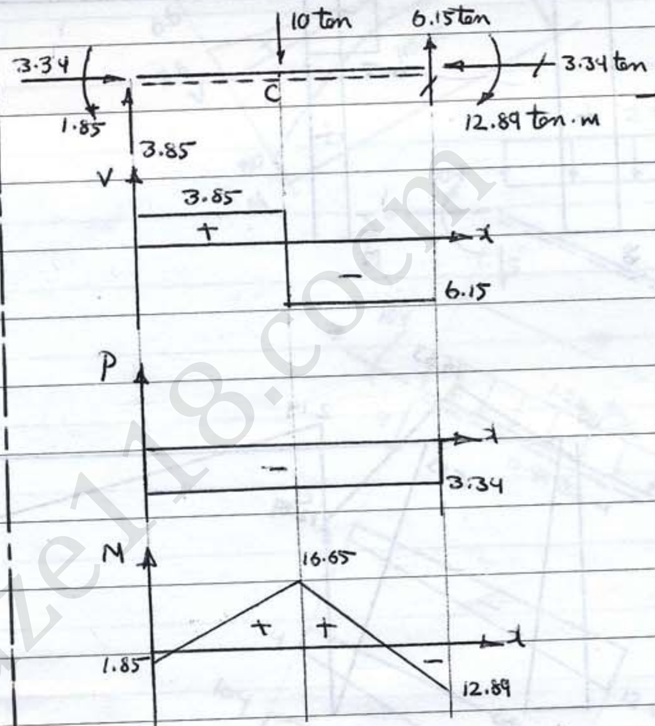
در مورد ستون ها تار پایین معمولاً دلخواه است انتخاب می گردد. تار پایین را به صورت خط چین روی شکل نمایش می دهند.

برای رسم نمودار اعضای قاب به صورت تک به تک در گره ها مانند تکیه گاه جدا شده نمودارشان رسم می گردد.

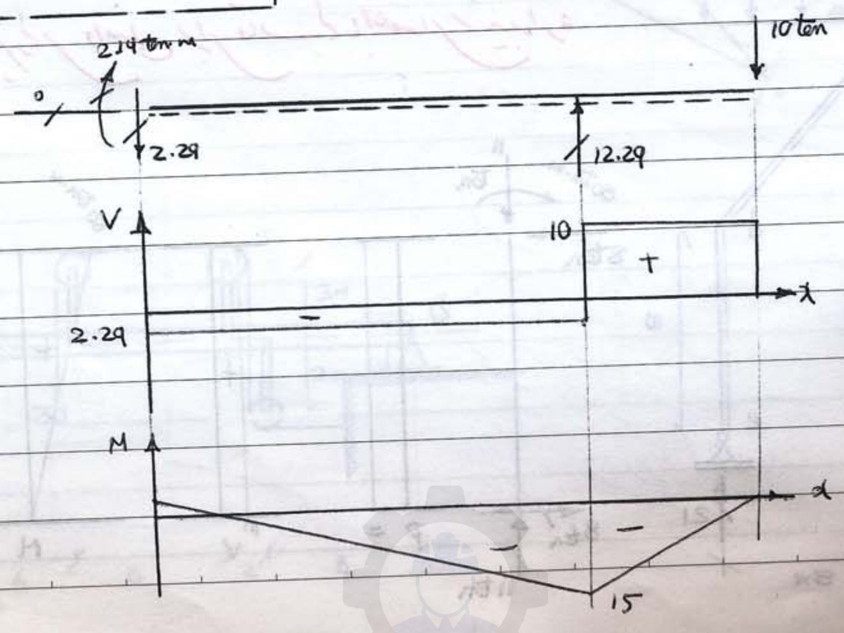
* عضو AB را در گره مانند به گره جدا می کنیم و چون گره کاری نداریم یعنی 5 ton را بررسی نمی کنیم.


3.85
1.85
1.66
B
A
1.66
7.83
3.85
P
3.85
V
1.66
M
1.85
7.83

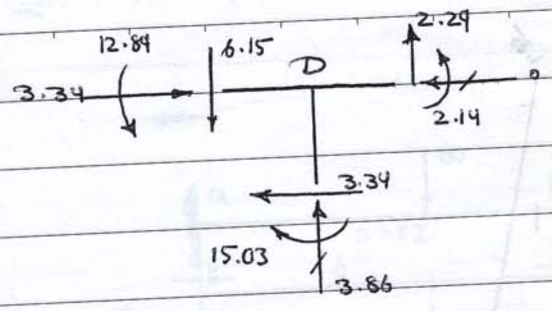

B
5 ton
3.34
3.85
1.85 ton.m
1.66
1.85 ton.m
3.85
3.86
15.03
3.34
15.03
-3.85
+3.34
3.34
3.86
P
V
M

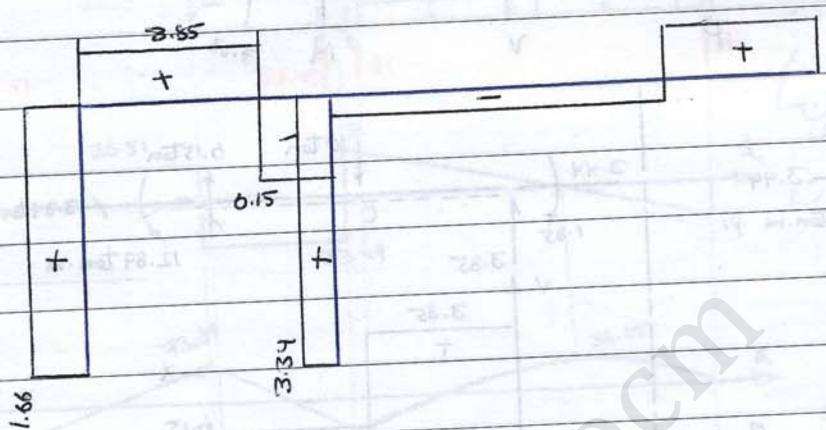

10 ton
6.15 ton
3.34
C
3.34 ton
1.85
3.85
12.89 ton.m
V
3.85
6.15
P
3.34
M
16.65
1.85
12.89

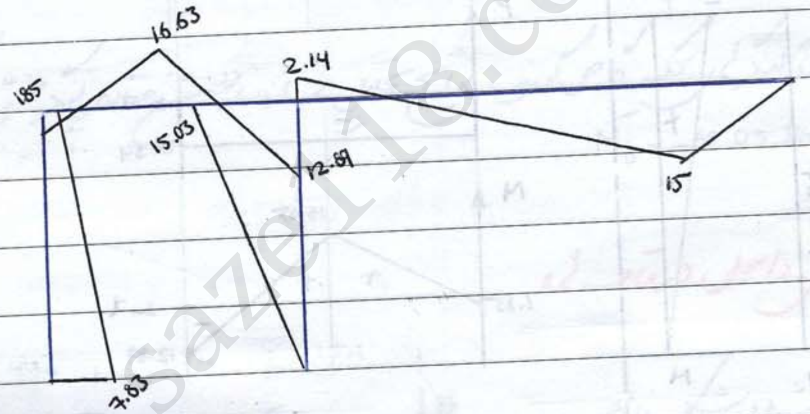
عبور از گره B ،


10 ton
2.14 ton.m
2.29
12.29
V
10
2.29
M
15

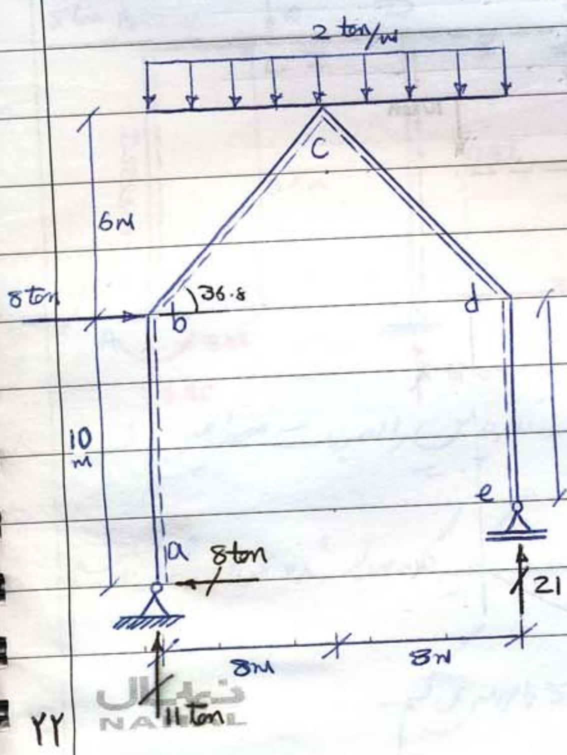
کنترل گره D

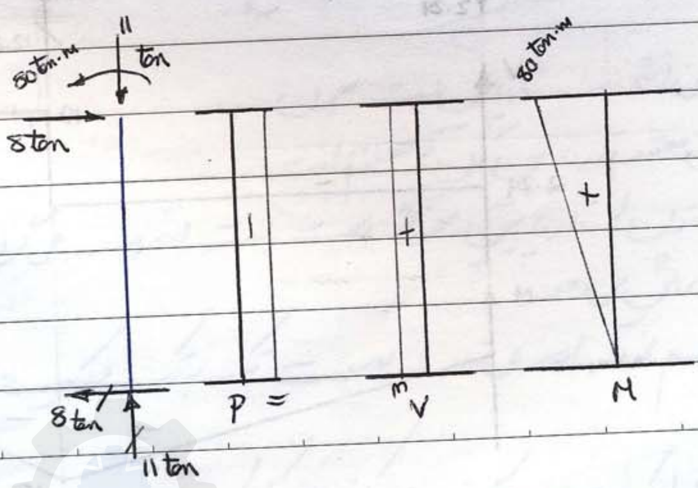


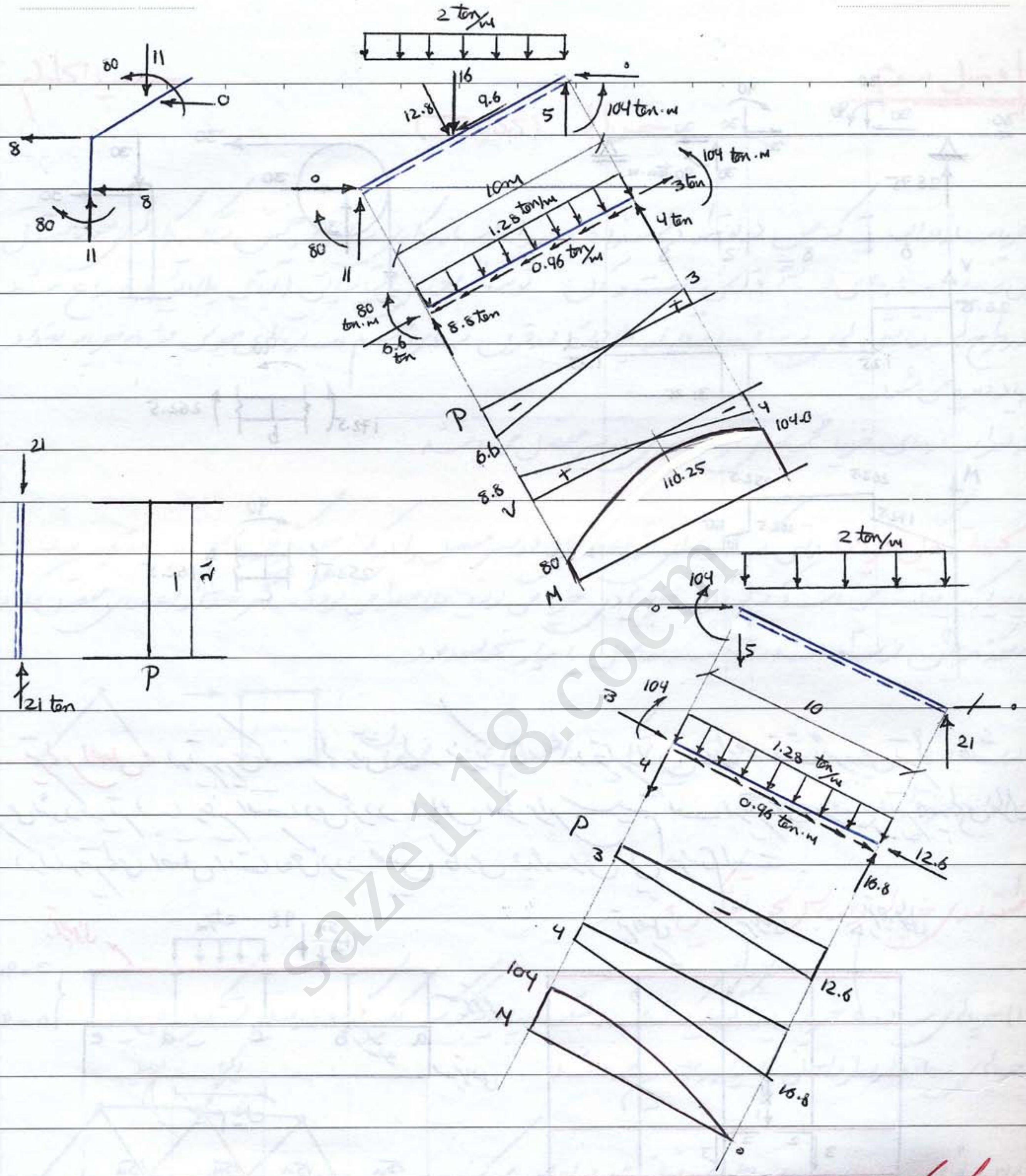



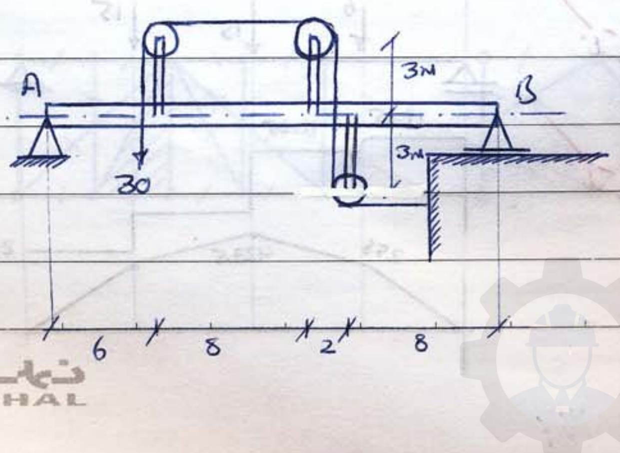

رسم نمودار نیروهای داخلی برای قاب با اعضای شیبدار

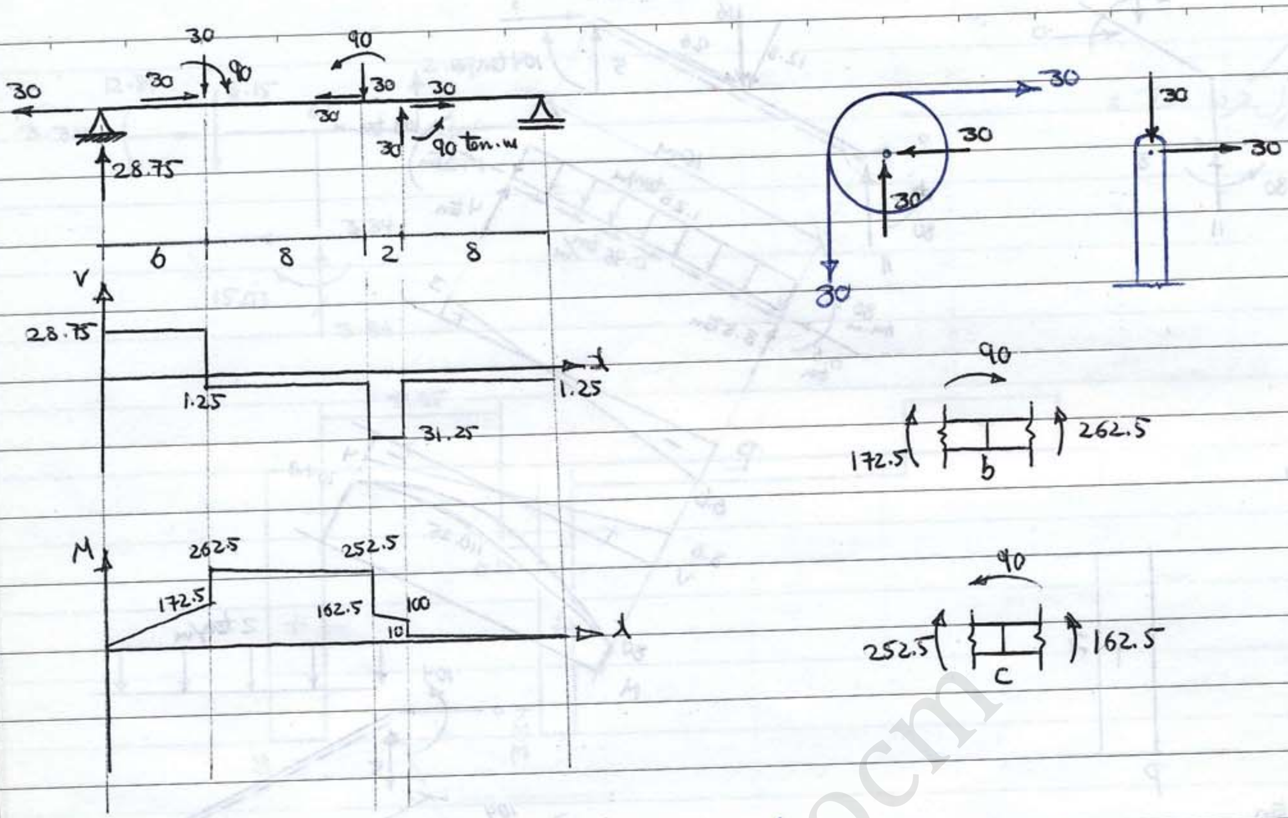


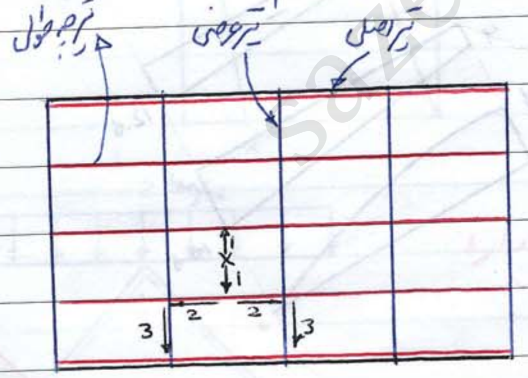


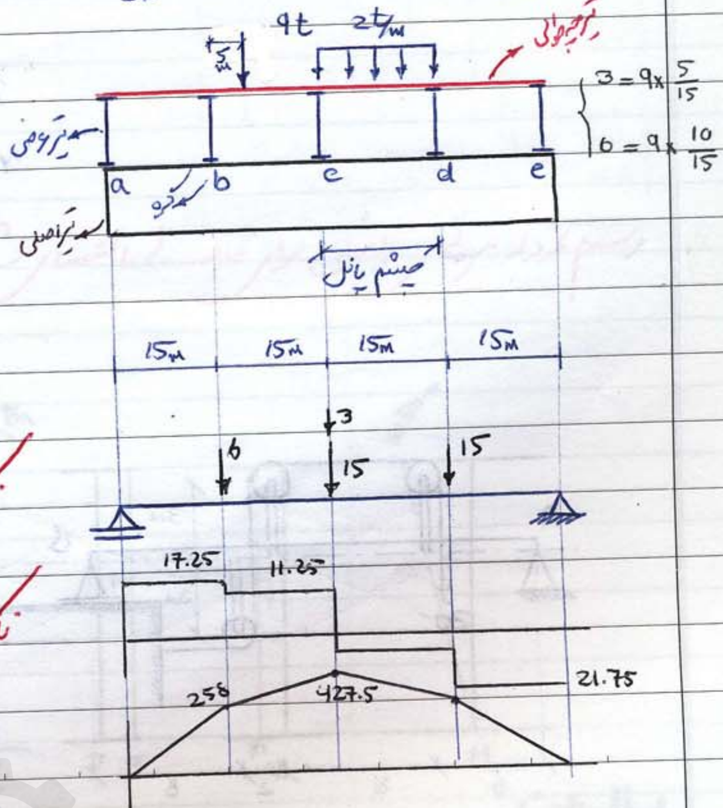

وجود لنگر متمرکز






**تیرهای اصلی:** در تیرریزی کف که وقتی دهانه بزرگ باشد قرار دادن بارها مستقیماً بر روی تیرها باعث می‌شود که تیر بسیار غیر اقتصادی گردد. از این نظر در سیستم کف از تیرهای عرضی و تیرچه‌های طولی در کنار تیرهای اصلی استفاده می‌گردد. چنین کاری در مهندسی پل مرسوم است.




**نکته:** بر تیر اصلی بار فقط از طریق گره‌ها اعمال می‌شود.

**نکته:** برش در هر چشمه ثابت است. لنگر حداکثر در محل گره رخ می‌دهد.

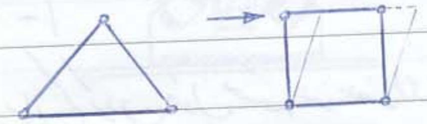
حمید کاظم

# خرپاها (TRUSS)

خرپا سازه‌ایست که بین دو نقطه دهانه زده و بار را با سازوکاری به غیر از خمش به تکیه‌گاه‌های خود منتقل می‌نماید. سازه‌ای نسبتاً قدیمی است و آن توسط معمار ایتالیایی (آقای پالادیو) ابداع شد. در طرح‌ها و نقاشی‌های برجای مانده از پالادیو در قرن شانزدهم سازه‌های چوبی شبیه خرپا به تعداد زیاد دیده می‌شود.

از نظر سازه‌ای خرپا مجموعه‌ای از اعضای دوسر مفصل می‌باشد.

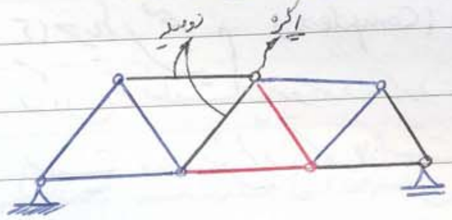
**نحوه تشکیل خرپاها:** وقتی که مجموعه‌ای از اعضای دوسر مفصل را در کنار هم قرار دهیم سازه در صورتی حالت پایدار به شکل مثلث می‌باشد که به آن هرم بنیادی خرپا می‌گویند. ملاحظه می‌گردد که اگر تعداد اعضای مفصل شده به هم بیش از ۳ باشد، ترکیب حاصل ناپایدار خواهد بود.



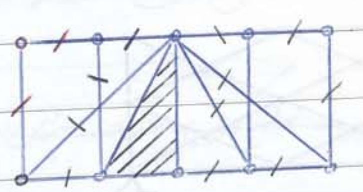
با رشد مثلث پایه با استفاده از قوانین ترکیب اجسام صلب می‌توان به انواع خرپاها دست یافت.

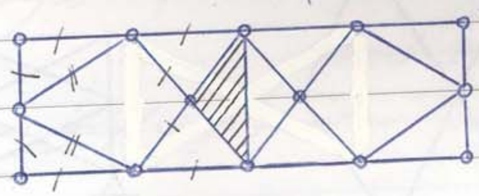
## دسته‌بندی خرپاها بر اساس نحوه تشکیل

۱) خرپاهای ساده: خرپایی را گویند که از رشد مثلث پایه به کمک یک گره و دو میله تشکیل می‌یابد.
خرپاهای ساده از نظر داخلی پایدار و معین می‌باشد.

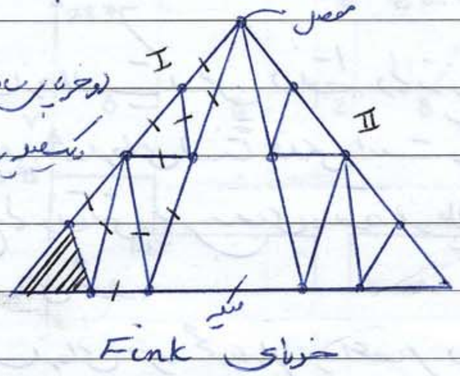


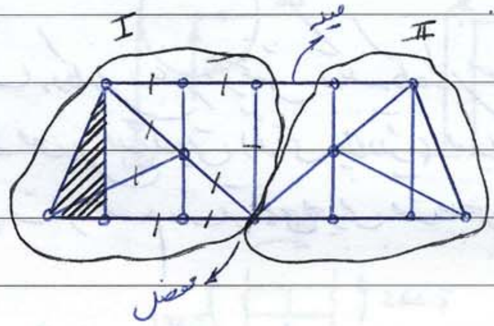

برای اثبات خرپای ساده خرپای مثلثی مبنا را فرض می‌کنیم و روش دو میله یک گره را بررسی می‌کنیم.





۲) خرپای مرکب : خرپای مرکب از ترکیب دو یا چند خرپای ساده به کمک قوانین ترکیب اجسام صلب تشکیل می یابد.

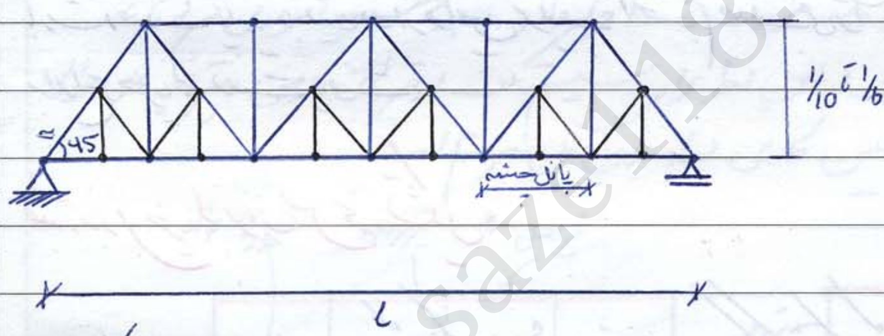


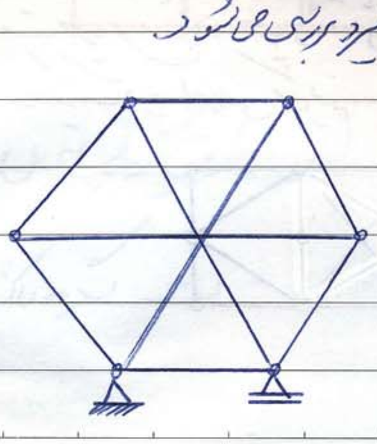

خرپای مرکب نیز از لحاظ داخلی معین و پایدارند.

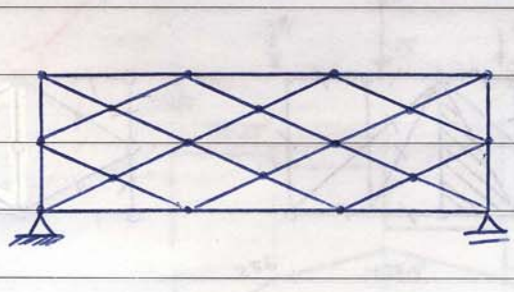
۳) خرپای تقسیم شده : حالتی از خرپای ساده هستند که در آن به علت بزرگی چشمه ها سعی می شود طول چشمه تقسیم شده و کوچک تر گردد. معمولاً در خرپای پل سازی با دهانه های بلند مورد استفاده دارد.

برای کم کردن طول چشمه از عضوهای [illegible] استفاده می کنند.



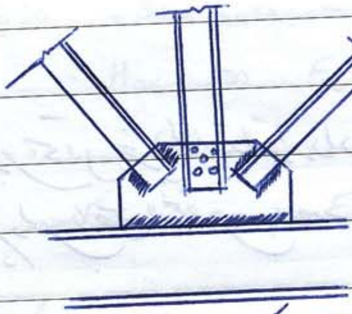

۴) خرپای مبهم (Complex) : مجموعه ای از اعضای دو سر مفصل می باشند که پایدار هستند، لکن در آن ها مثلث پایه وجود ندارد. پایداری آن ها را (تشخیص) به کمک روش های هندسی امکان پذیر نیست و با روش هایی در قسمت های دیگر مورد بحث قرار گیرد بررسی می شود.

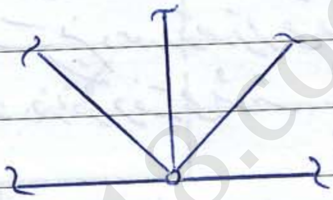




**مفروضات اولیه تحلیل خرپاها:** برای اینکه بتوان خرپایی را با اصول استاتیک (سه رابطه تعادل) تحلیل نمود باید مفروضاتی را برای آن انجام دهیم.
خرپاهای واقعی دارای تمام این خصوصیات نیستند، ولی اگر مفروضات ما بتوانند باعث سادگی کار شده و همچنین نتایج حاصله اختلاف زیادی با تحلیل دقیق نداشته باشد می‌توان از این مفروضات استفاده نمود و تحلیل خرپاها را بسیار ساده نمود.

۱) اعضای خرپا در انتها به همدیگر لولا شده و اصطکاک در لولا صفر است. در خرپاهای واقعی نه تنها اعضا در انتها به هم لولا نمی‌شوند، بلکه حتی به همدیگر جوش نیز می‌گردند. این اتصال شرایط لولا بدون اصطکاک ندارد.





اتصالات واقعی نه تنها لولایی نیستند بلکه صلب می‌باشند، تحلیل واقعی نشان می‌دهد که در اعضای خرپا، علاوه بر نیروی محوری، لنگر خمشی نیز در دو انتهای آن ظاهر می‌شود. به این لنگرها، لنگرهای ثانوی گویند. تجربیات عملی نشان می‌دهد وقتی که ارتفاع خرپا در حدود 0.1 تا 0.6 دهانه باشد و زوایای قطری‌ها در حدود 45° باشد مقدار لنگرهای ثانوی کوچک بوده و نیروی محوری خرپای ایده‌آل بسیار نزدیک به خرپای واقعی خواهد بود. پس با این شرایط فرض ساده‌سازی لولایی را می‌توانیم بپذیریم.

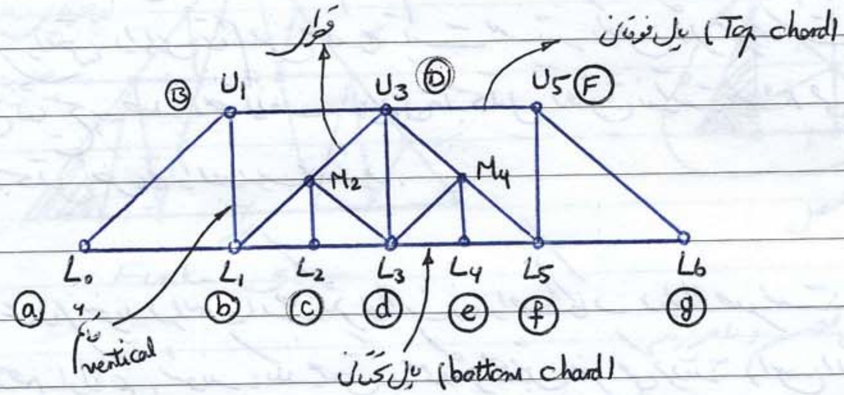
۲) اعضای خرپا مستقیم می‌باشند (اگر نباشد نیروی محوری لنگر می‌سازد)

۳) نیروهای خارجی و تکیه‌گاهی به گره‌ها اعمال می‌شوند. در عمل تأمین این شرط بسیار ساده است. تنها نقطه ابهام وزن اعضای خرپاست که به صورت گسترده بر روی عضو قرار دارد. در عمل وزن اعضا را به صورت دو بار متمرکز در دو انتها اعمال می‌کنید.
تغییر شکل‌های خرپا کوچک هستند، هندسه خرپای تغییر شکل یافته با حالت اولیه آن اختلاف چندانی ندارد.

**نتیجه مفروضات فوق:** اعضای خرپا 2 نیرویی می‌باشند و در آن‌ها فقط نیروهای محوری ایجاد می‌گردد.
نیروی محوری می‌تواند کششی باشد. در این صورت با علامت مثبت نمایش می‌دهند و اگر فشاری باشد

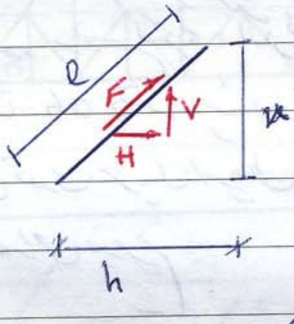
با منفی نشان می دهند

## نامگذاری اعضای خرپاها




برای تحلیل خرپاها ابتدا قرارداد علامت نیرو در اعضا را توضیح قرار می گیرند. نیروهای داخلی کششی با علامت + و نیروهای داخلی فشاری با علامت - در نظر گرفته می شوند.


## ارتباط بین مولفه ها و هندسه عضو




$$\frac{F}{l} = \frac{H}{h} = \frac{V}{v}$$

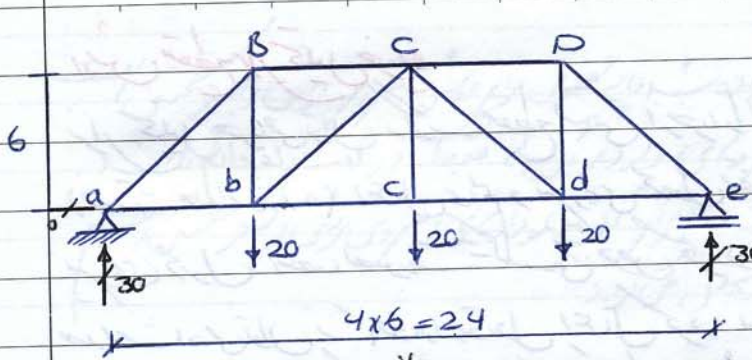
## روش گره برای تحلیل خرپاها

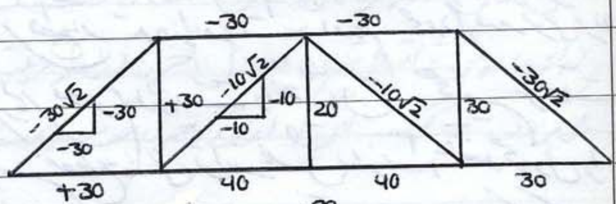
در روش گره برای تحلیل خرپا، ابتدا واکنش های تکیه گاهی محاسبه می گردد. سپس گره های خرپا بصورت مجزا آزاد شده و نمودار آزاد آن ها رسم می گردد. در این نمودار آزاد نیروهای معلوم در جهت واقعی و نیروهای مجهول اعضا بصورت کششی نمایش داده می شوند. سپس معادلات تعادل را برای این گره اعمال می کنیم. با توجه به اینکه نیروها متقارب هستند دو معادله تعادل بیشتر نخواهیم داشت.

$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$

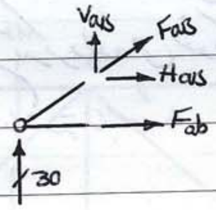
بنابراین باید گره ای را آزاد نماییم که دو مجهول بیشتر نداشته باشد. همچنین توصیه می شود با تمرین فراوان این توانایی ایجاد گردد که طراح بدون نوشتن معادلات تعادل اقدام به تعیین نیروها نماید. در حالات متعددی این موضوع امکان پذیر می باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در شکل را تحلیل نمایید.




گره a:



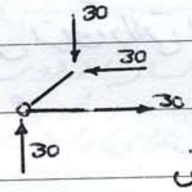

$\sum F_y = 0 \quad +30 + V_{aB} = 0 \rightarrow V_{aB} = -30\,ton$

$H_{aB} = -30 \quad F_{aB} = -30\sqrt{2}$ فشاری

$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{ab} + H_{aB} = 0$

$\rightarrow F_{ab} - 30 = 0 \rightarrow F_{ab} = 30$ کششی

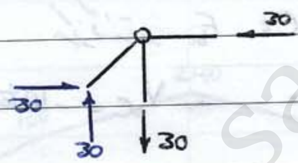
گره a:



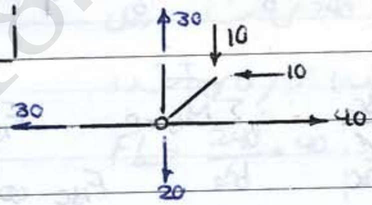

روش استاتیک ذهنی

* روش استاتیک ذهنی وقتی قابل استفاده است که در گره ۲ معادله ۲ مجهولی نداشته باشیم.

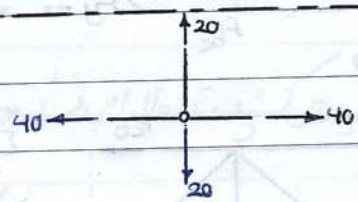
گره B:




گره b:




گره c (وسط):



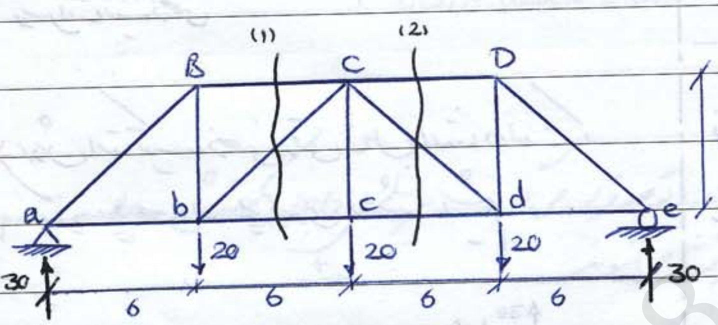

* بقیه اعضا را توسط تقارن می توان بدست آورد.

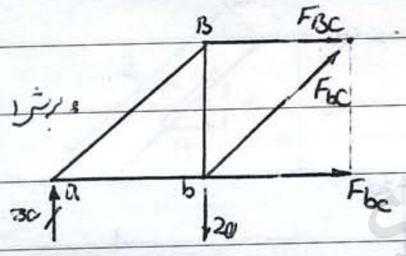
مرکز گشتاور نیرو به نقطه ای گفته می شود که وقتی نسبت به آن ممان می گیریم تنها آن نیروی مجهول باقی بماند.

## روش مقطع برای تحلیل خرپاها

برای تحلیل خرپا می توان به کمک مقطع قسمتی از خرپا را از بقیه قسمت که جدا نمائیم، معادلات تعادل را بر آن (قسمت جدا شده) اعمال نمائیم و نیروهای مجهول اعضای قطع شده را بدست آوریم. معمولاً فرض می گردد نیروهای مجهول اعضاء بصورت کششی فرض گردد و نیروهای معلوم در جهت واقعیشان. همچنین در قسمت جدا شده می توان ۳ معادله تعادل اعمال کرد. بنابراین مقطع ها نمی توانند بیش از ۳ عضو مجهول را قطع نمایند. همچنین تذکر داده می شود که در هنگام نوشتن معادلات تعادل از معادلاتی استفاده کنیم که بیش از یک مجهول نداشته باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در مثال قبل را به روش مقطع تحلیل نمایید.

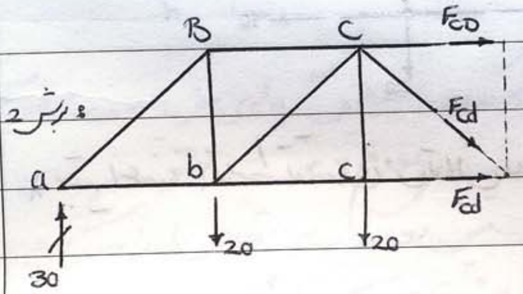



$\Sigma M_b = 0 \quad -F_{BC} \times 6 - 30 \times 60 = 0 \rightarrow F_{BC} = -30\ ton$

b مرکز گشتاور $F_{BC}$ ، C مرکز گشتاور $F_{bc}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow +30 - 20 + V_{bC} = 0 \rightarrow V_{bC} = -10\ ton$



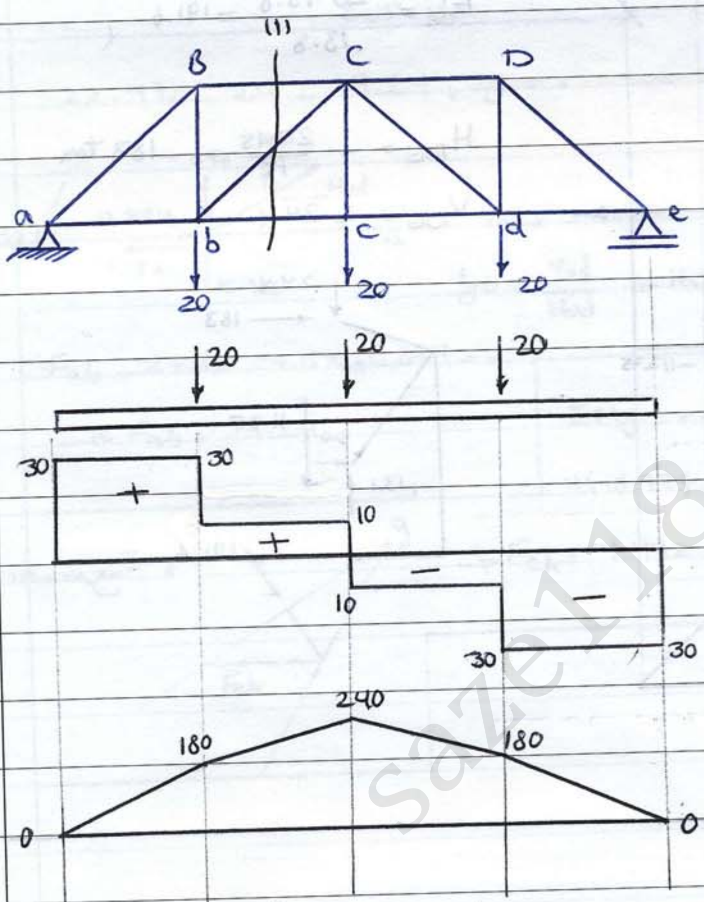

$\Sigma M_{C} = 0 \quad F_{cd} \times 6 + 20 \times 6 - 30 \times 12 = 0 \rightarrow F_{cd} = 40\ ton$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow +30 - 20 - 20 + V_{cd} = 0 \rightarrow V_{cd} = 10\ ton$

# روش نیروی برشی و لنگر خمشی

توضیح این که در قسمت قبل برای روش مقطع داده شد پایه و اصول برای روش نیروی برشی و لنگر خمشی است. این روش در خرپاهایی قابل استفاده است که نیروهای وارد بر آن که فقط در امتداد قائم باشد. در این روش ابتدا تیری معادل خرپا در نظر گرفته شده و برای آن نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می‌گردد که به کمک این دو نمودار خرپا به سرعت تحلیل می‌گردد.

مثال: خرپای نشان داده شده در مثال قبل را به روش نیروی برشی و لنگر خمشی تحلیل کنید.




$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$

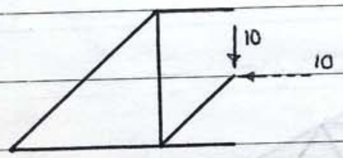
$F_{BC} = \frac{180}{6} = -30$

نقطه C (بزرگ) مرکز گشتاور $F_{bc}$ می‌باشد و چون در نمودار لنگر خمشی دارای لنگر 240 می‌باشد و بازوی $F_{bc}$ نسبت به نقطه C (بزرگ) برابر 6 می‌باشد، پس:

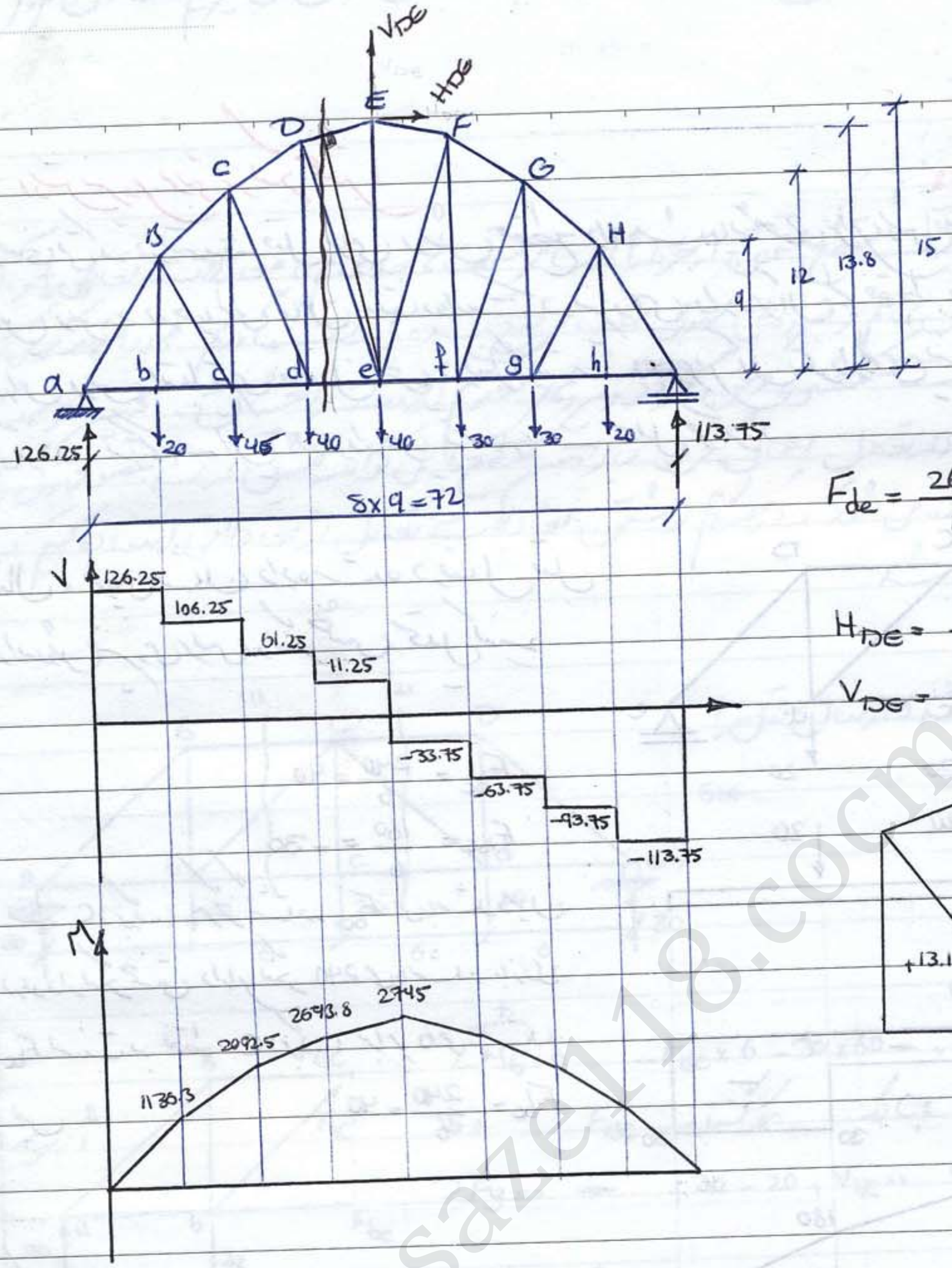
$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$

* لنگر مثبت تار پایین را می‌کشد و تار بالا را می‌فشارد.

با استفاده از نمودار نیروی برشی می‌توان مولفه قائم کلیه اعضای قطری را بدست آورد. مقطع (1) را که در آن عضو قطری Cb قطع شده را در نظر می‌گیریم. طبق قرارداد نیروی برشی، چون در مقطع (1) نیروی برشی مثبت است، پس جهت نیروی برشی مقاوم در مقطع قسمت سمت چپ به سمت پایین می‌باشد. بنابراین مولفه قائم نیروی عضوی قائم Cb نیز به سمت پایین و مساوی 10 تن است.



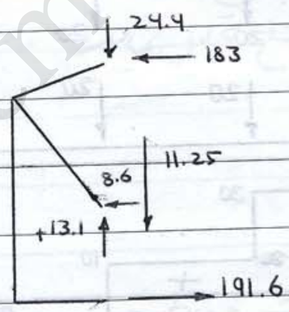
مثال ـ خرپای مقابل را تحلیل کنید

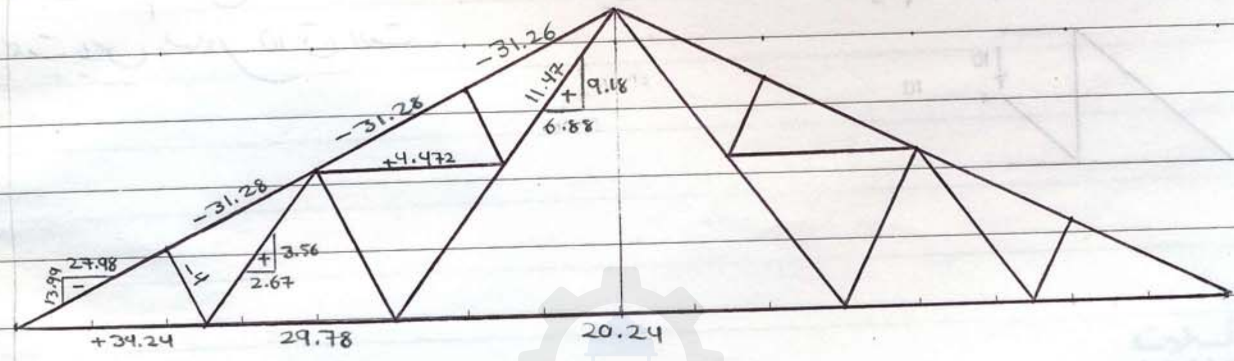


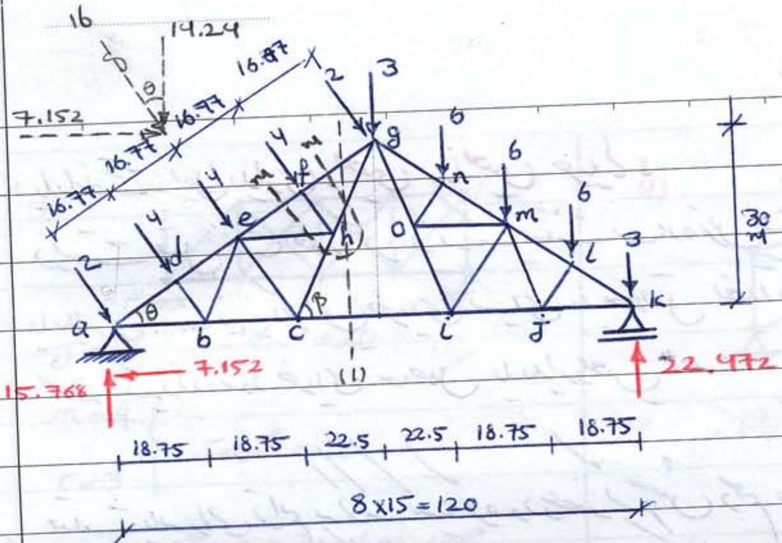

$$F_{de} = \frac{2643.8}{13.8} = 191.6$$

$$H_{DE} = -\frac{2745}{15} = -183 \text{ ton}$$

$$V_{DE} = -24.4$$






$tg\theta = \frac{1}{2}$ $\sin\theta = 0.447$ $C\theta = 0.89$

مثال ۵

$\Sigma M_a = 0$

$\rightarrow 4(16.77) + 4(2\times16.77) + 4(3\times16.77)$

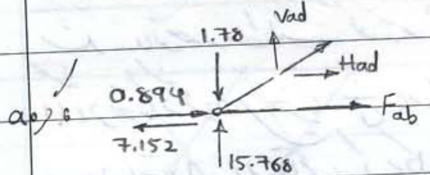
$+ 2(4\times16.77) + 3(4\times15) + 6(5\times15)$

$+ 6(6\times15) + 6(7\times15) + 3(8\times15)$

$= 8\times15\, k_y \qquad k_y = 22.472$

$22.472 - 24 - 14.24 + a_y = 0 \rightarrow a_y = 15.768 \qquad a_x = 7.152$

گره a:



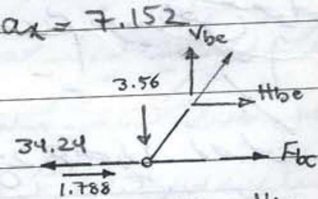

$V_{ad} = -13.99$

$tg\theta = \frac{V_{ad}}{H_{ad}} \rightarrow H_{ad} = -27.98$

$F_{ab} - 27.98 - 7.152 + 0.894 = 0$

$\rightarrow F_{ab} = 34.24$

گره b:




$V_{be} = 3.56 \qquad \frac{3.56}{15} = \frac{H_{be}}{11.25}$

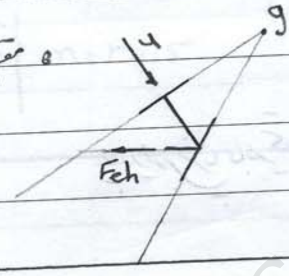
$H_{be} = 2.67 \quad F_{bc} = 29.78$

$\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) - F_{eh}(15) = 0$

$\rightarrow F_{eh} = 4.472$

m−m مقطع:




برش ۱: $\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) + 4(2\times16.77) + 4(3\times16.77)$

$+ 2(4\times16.77) - 7.152(30)$

$- 15.768(60) + F_{ci}(30) = 0$

$\rightarrow F_{ci} = 20.24$

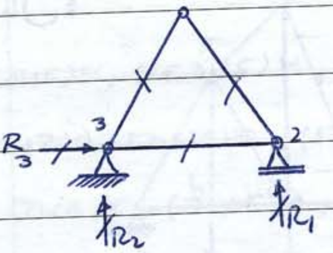
$\Sigma M_c = 0$

$2(2\times16.77) - 15.768(2\times18.75)$

$- F_{fg}(16.77) = 0 \rightarrow F_{fg} = -31.26$


$F_{gh}(C53.13) + 20.94 = 31.26(0.89)$

## پایداری و ناپایداری، معین و نامعین خرپاها:




در قسمت قبل مشاهده گردید که یک مثلث ساده ترین شکل خرپای پایدار می باشد. اگر این خرپای مبنا با حداقل تعداد مولفه ها در صفحه تکیه داده شود خرپای حاصل پایدار و معین است.

مشاهده شد پایه را می توانیم به کمک یک گره و دو عضو گسترش دهیم بدون اینکه در پایداری و معینی آن تغییر ایجاد گردد. حال اگر بدون اینکه گره ای به خرپا اضافه کنیم، عضوی به خرپا اضافه نماییم خرپا نامعین خواهد شد. با توجه به مطالب گفته شده می توانیم اینطور نتیجه گیری نماییم:

1) اگر تعداد گره های خرپا J باشد تعداد معادلات تعادل استاتیکی 2J خواهد بود. توجه شود در ۳ معادله تعادل استاتیکی که برای کل سازه نوشته می شود مستقل از 2J معادله نیست.

۲) اگر m تعداد اعضای خرپا و r تعداد مولفه های تکیه گاهی باشد، تعداد مجهولات مساوی m+r خواهد شد. می توانیم بنویسیم:

تعداد معادلات $= 2J$      تعداد مجهولات $= m+r$

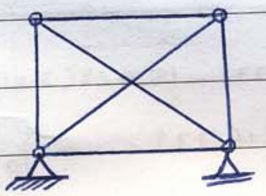
1) $2J > m+r$ خرپا ناپایدار استاتیکی

2) $2J = m+r$ خرپای معین

3) $2J < m+r$ خرپای نامعین

پایداری خرپا باید تحقیق گردد (شرط لازم است ولی کافی نیست)

1)

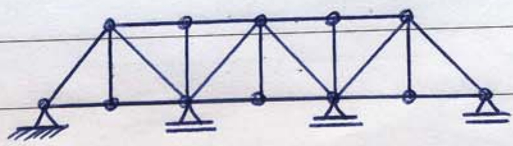


$J=4 \rightarrow$ معادلات $= 8$

$m=6$, $r=3$ $\rightarrow$ مجهولات $= 9$

خرپای پایدار و یک درجه نامعین

2)



$J=12$    $2J=24$

$m=21$, $r=5$ $\quad m+r=26$

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین خارجی

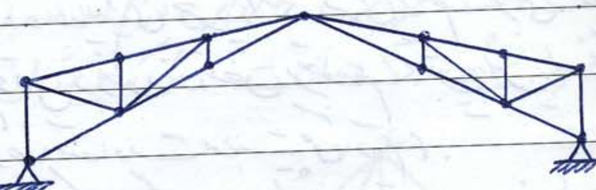
3)

$J=10$    تعداد معادلات $=20$

$\left.\begin{array}{l} m=19 \\ r=3 \end{array}\right\}$ تعداد مجهولات $=22$

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین

4)

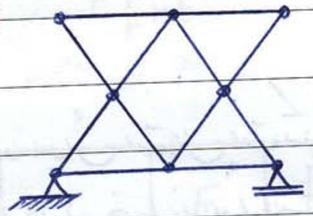


$J=13$    $2J=26$

$\left.\begin{array}{l} m=22 \\ r=4 \end{array}\right\} m+r=26$ خرپای پایدار و معین

در حجم تورلط یک صلب و یک مفصل پایداری شوند ولی اینجا فقط یک مفصل بکار رفته که باعث یک درجه ناپایداری گشته است. برای جبران این ناپایداری به جای 3 مولفه تکیه‌گاهی از چهار مولفه استفاده شده است.

5)



$J=8$    $2J=16$

$\left.\begin{array}{l} m=12 \\ r=3 \end{array}\right\} m+r=15$ خرپا ناپایدار است.

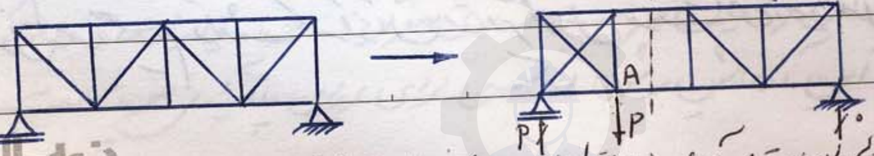
## دلایل ناپایداری خرپا :

۱) تعداد معادلات $2J$ بزرگتر از $m+r$.

۲) عدم وجود شکل‌های مثلثی. اگر در قسمتی از خرپا شکل مثلثی مشخص نشود می‌تواند نقطه‌ای برای ناپایداری خرپا باشد.

۳) تکیه‌گاه‌های ناپایدار نیز می‌توانند دلیلی بر ناپایداری باشند.

۴) استدلال‌های استاتیکی : اگر بتوانیم ثابت کنیم خرپایی فقط برای یک حالت بارگذاری ناپایدار است می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که آن خرپا ناپایدار است.



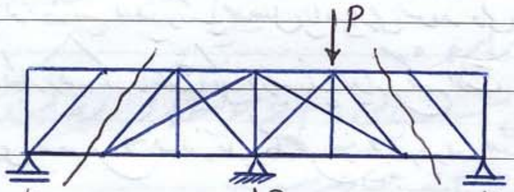

J ، m و r تغییری نکرد.

بار P را به A وارد می‌کنیم. تکیه‌گاه‌ها را بدست می‌آوریم. (با مقطع زدن در عضو راست A) سپس $\Sigma M=0$ برقرار نمی‌باشد.

۵) تحلیل خرپا. اگر نتوانیم با یکی از روش‌های گفته شده ناپایداری خرپا را نتیجه‌گیری نماییم، برای تشخیص ناپایداری اقدام به تحلیل خرپا می‌نماییم. اگر در حین تحلیل به وجود تناقض برخوردیم، معنی این است که خرپا ناپایدار می‌باشد. (نیروی عضو را از دو راه دو عدد متفاوت بدست می‌آوریم).
در حالت پیشرفته‌تر این روش منجر به روش بار صفر می‌گردد که از آن برای تشخیص ناپایداری خرپاهای مبهم استفاده می‌شود. در فرصت مناسب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال‌هایی از استدلال‌های استاتیکی

1)

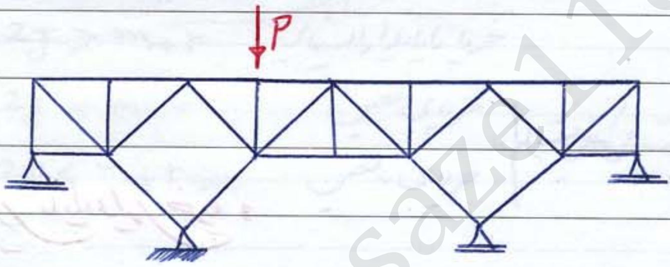


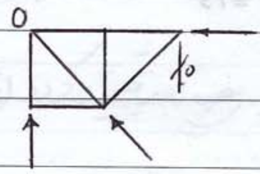

$J=14$ ✗ $2J=28$ $\uparrow P$ ✗

$m=25$
$r=4$ $\Big\}\ m+r=29$

اما با روش استدلال استاتیکی با اعمال بار P مشخص می‌شود که $\Sigma M \neq 0$ در نتیجه خرپا ناپایدار است.

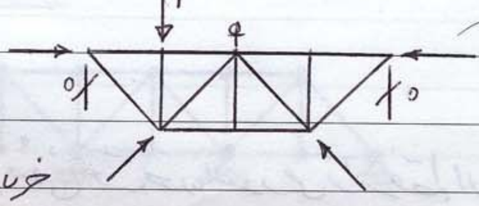
2)




$J=18$ $2J=36$

$m=31$
$r=5$ $\rightarrow \Big\}\ m+r=36$

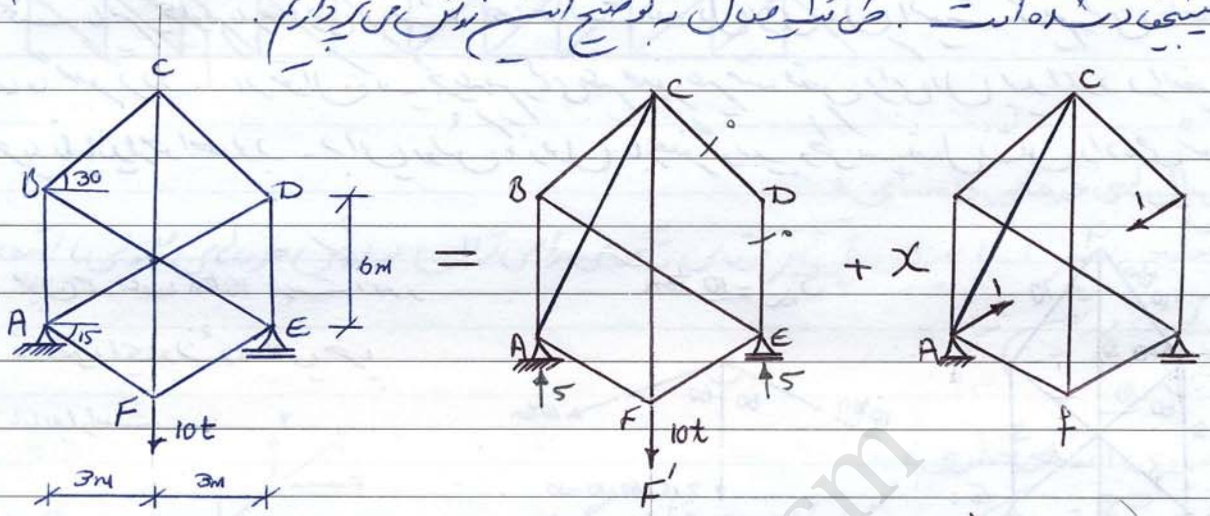



خرپا ناپایدار است.

$\Sigma M_q \neq 0$

تحلیل خرپاهای مبهم: خرپای مبهم را نمی‌توان با روش گره یا مقطع حل نمود، زیرا نمی‌توان گره‌ای با دو مجهول یا مقطعی با سه مجهول در آن پیدا کرد. یک روش این است که تمام گره‌های خرپای مبهم را با یکدیگر به طور همزمان آزاد نماییم. در این صورت $2J$ معادله همزمان برای تعیین $m+r$ مجهول خواهیم داشت که از آن مقادیر مجهول بدست می‌آید. حل این معادلات همزمان ممکن

است وقت گیر باشد. روش دوم استفاده از اصل روی هم گذاری است که توسط شخصی به نام هنری بیشیف داده شده است. طی یک مثال به توضیح این روش می پردازیم.




$F_{AC} = F'_{AC} + x f_{AC} = 0$

$-10.89 + 0.465x = 0$

$x = +23.42$

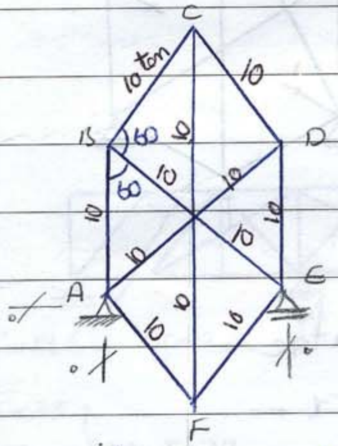
$F_{AD} = 0 + 1 \times x = 23.42\,t$

| | $F'$ | $f$ | $F = F' + xf$ |
|---|---|---|---|
| AB | +6.22 | −1.382 | −26.1 |
| BC | +4.55 | −1.01 | −19.1 |
| CD | 0 | −0.816 | −19.1 |
| DE | 0 | −1.115 | −26.1 |
| EF | +4.08 | −0.91 | −17.2 |
| FA | +4.08 | −0.91 | −17.2 |
| BE | −5.58 | +1.24 | +23.42 |
| CF | +7.89 | +0.471 | +18.9 |
| AC | −10.89 | +0.465 | 0 |

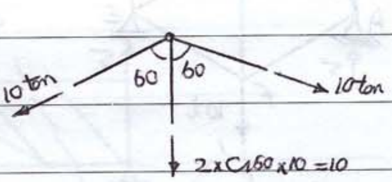
## پایداری خرپای مبهم، روش بار صفر

درصورتیکه برای کنترل یک خرپا (هر نوع خرپا) 2J معادله تشکیل شود از حل این دستگاه نیروهای مجهول اعضا قابل تعیین خواهد بود. این دستگاه وقتی دارای جواب است که دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد، بنابراین اگر دترمینان ضرایب مساوی صفر گردد، خرپا ناپایدار بوده و دستگاه دارای جواب نمی باشد. این آزمایش روش مناسبی برای بررسی پایداری خرپاها است.

می‌توان به طرق دیگری که قابلیت استفاده عمل داشته باشد بیان نمود. بدین معنا که اگر خرپایی تحت تاثیر هیچگونه بار خارجی نباشد تنها حالت منطقی برای آن این است که نیروهای داخلی آن تماماً صفر گردد. اگر بتوان یک مجموعه نیروهای غیر صفر غیر متناقض برای آن پیدا نمود در این صورت خرپا ناپایدار خواهد بود. در این روش آزمون بار صفر نامیده و طی یک مثال نشان داده می‌شود.

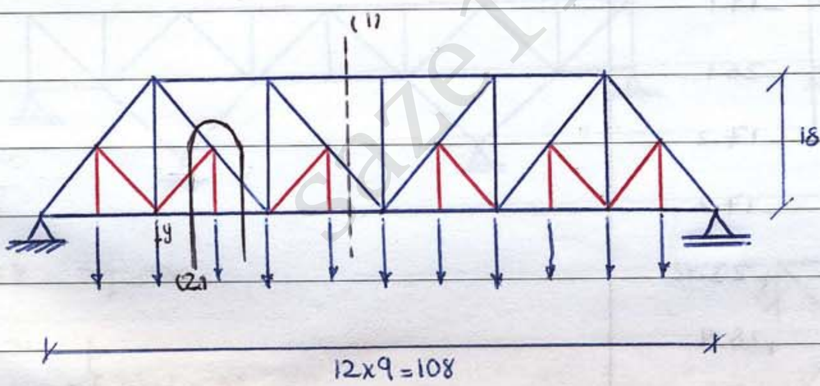



$S_{BC} = 10$ ton




چون که عضو 10ton بدست آمد و تناقض ایجاد شده یعنی خرپا ناپایدار است.

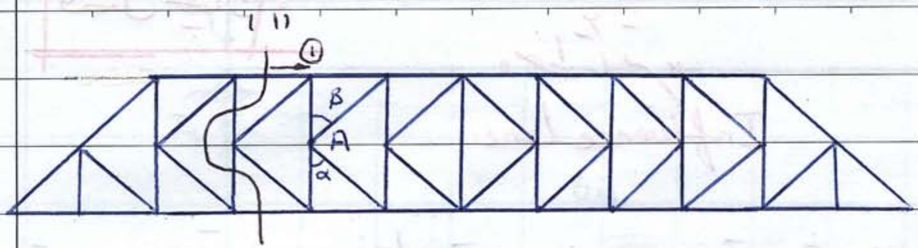
**تحلیل خرپای تقسیم شده:** تحلیل خرپای تقسیم شده مثل یک خرپای معمولی است. با این تفاوت که باید نیروهای اعضای تقسیم شده را به نحوی تعیین نمود. این کار با یک مقطع امکان پذیر است.




برای شکل آی زیر با مقطع (1) می‌توان از طریق لنگر خمشی و نیروی برشی نیروی عضو آی را بدست آورد.

$$P \times 9 + y \times 18 = 0 \longrightarrow y = -P/2$$

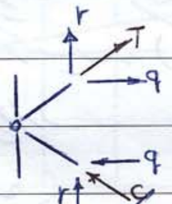
## تحلیل خرپای K:




تحلیل بال‌های فوقانی و تحتانی:

با عبور مقطعی نظیر ۱-۱ نیروی بال‌های فوقانی و تحتانی را می‌توان به روش خرپاهای معمولی با استفاده از نقطه گشتاور تعیین نمود.

تعیین نیروی اعضای قطری:




$\alpha = \beta$

نمودار آزاد گره A را رسم می‌کنیم. اگر زوایه اعضای قطری با هم مساوی باشند برش چشمه به طور مساوی بین مولفه‌های قائم دو قطری تقسیم خواهد شد. با توجه به شیب مخالف دو قطری اگر در یکی فشاری باشد، در دیگری کششی است.

حمید کاظم

# فصل چهارم:

## «خط تأثیر»
## Influence Line

تا به حال کلیه سازه فقط تحت بارهایی با موقعیت ثابت مورد توجه قرار گرفت. بارهای وارد بر یک سازه می توانند متحرک باشند. مثال خوبی از این موضوع پل ها می باشند که بارهای زنده که وارد بر آن ها کامیون ها یا خودروهایی است که با سرعت از روی آن عبور می کنند. چنین وضعی را می توان به طور آرام تر در یک ساختمان نیز مشاهده نمود. جابجا شدن بارهای زنده که یک ساختمان از محلی به محل دیگر نشان دهنده این مدعا است.

مقدار یک تابع مشخص از یک سازه (واکنش تکیه گاهی، نیروهای داخلی و حتی تغییر شکل که یک تابع از سازه می باشد) بستگی به عوامل زیر دارد.

1) مقدار بار وارده
2) موقعیت بار وارده
3) محل مورد نظر برای مطالعه تابع

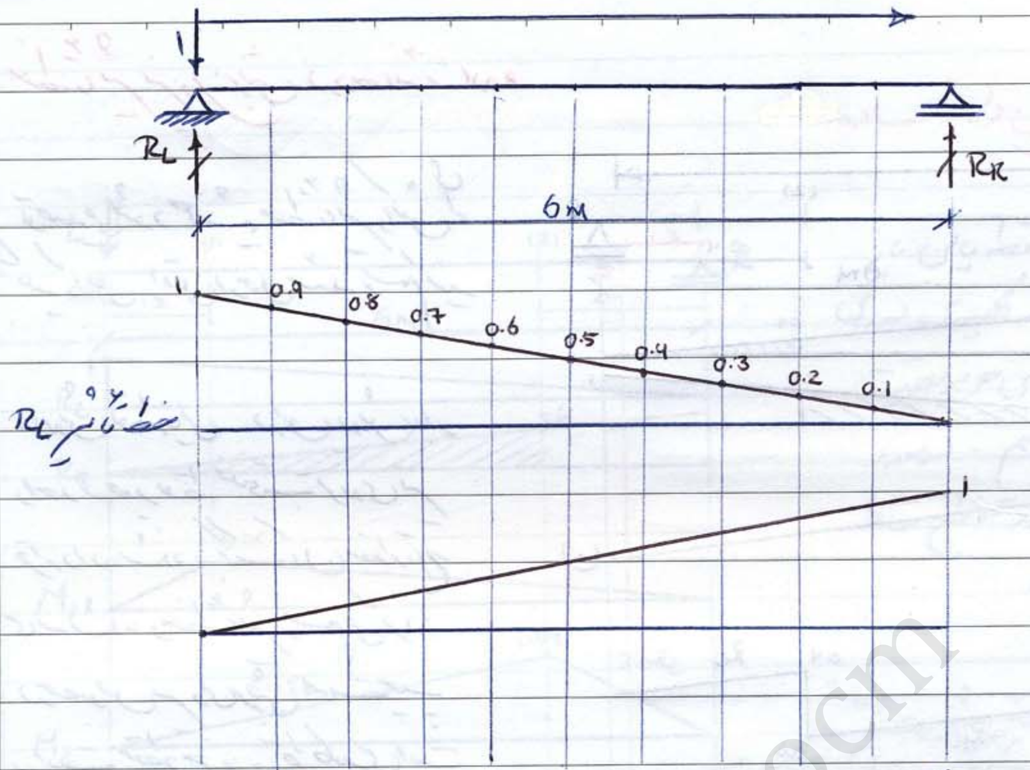
با یک جمع بندی یک مهندس آلمانی به نام وینکلر (Winkler) ایده ای ابداع نمود که این بررسی به جای ۳ متغیر با یک متغیر تنها انجام شود.

1) هر بار فقط یک تابع مشخص بررسی شود.
2) مقدار بار را واحد در نظر بگیرید.
3) موقعیت بار واحد می تواند متغیر باشد.

نموداری که تغییرات تابع را بر حسب موقعیت بار واحد نشان دهد خط تأثیر نامیده می شود.

### رسم خط تأثیر واکنش های تکیه گاهی یک تیر ساده

ساده ترین روش رسم خط تأثیر نقطه یابی است. یعنی بار واحد را بر روی موقعیت های مختلف از طول سازه اثر می دهیم و در هر موقعیت مقدار تابع را محاسبه می نماییم و مقدار به دست آمده را به صورت عرض خط تأثیر زیر بار واحد ترسیم می دهیم. با کمی پیشرفت در کار با یادگیری توانایی به وجود می آید که تعداد نقطه یابی ها کم گردد.

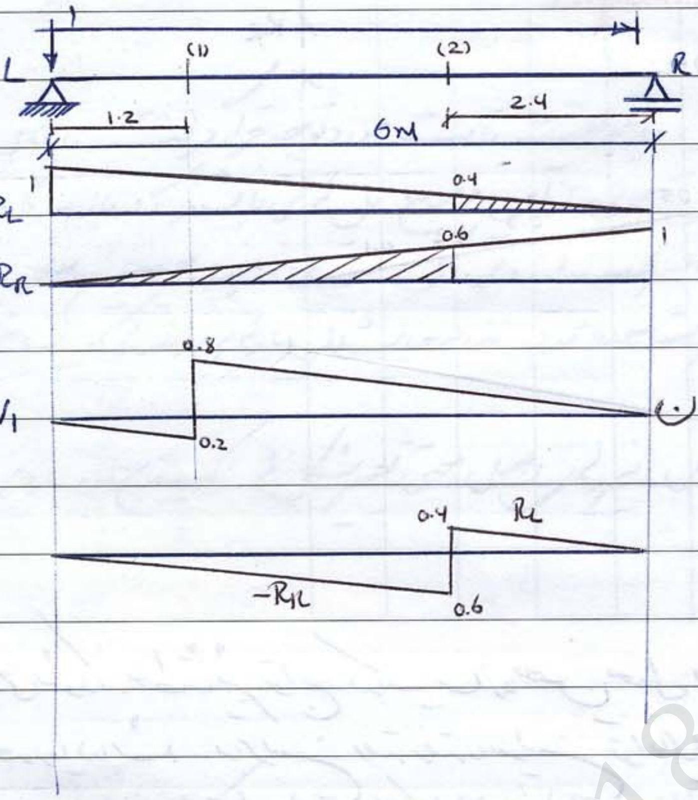



ملاحظه می‌شود که خط تأثیر توابع در یک سازه معین خطی است. بنابراین فرقی ندارد که تعداد نقاط مورد مطالعه زیاد باشد. بنابراین همه این نکته باید این توانایی بوجود آید که بتوانیم با حداقل نقاط خط تأثیر را رسم نماییم. بعضی نقاط را نقاط کلیدی می‌نامیم. یعنی نقاطی که تشخیص می‌دهیم در آنها ناپیوستگی و تغییر ناگهانی در خط تأثیر بوجود می‌آید نیاز به تجربه دارد. نقاط ابتدا و انتهای سازه، محل واکنش‌های تکیه‌گاهی، لولاهای داخلی نقاطی هستند که می‌توانند ناپیوستگی یا تغییر شکل داشته باشند و باید به عنوان نقاط کلیدی مورد بررسی قرار گیرند.

بعد از رسم خط تأثیر کامل توصیه است که نقاط دیگری به عنوان کنترل توجه شود. به عنوان مثال برای رسم خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت راست. یک بار واحد را در نقطه وسط قرار می‌دهیم. واکنش محاسبه می‌شود. نیمی از بار روی واکنش راست می‌اندازیم. مقدار واکنش نصف می‌شود. با وصل کردن این دو نقطه نمودار کامل می‌شود.

برای کنترل از نقطه دیگر و $\Sigma F_y$ استفاده می‌کنیم.

# خط تأثیر نیروی برشی در دهانه ساده

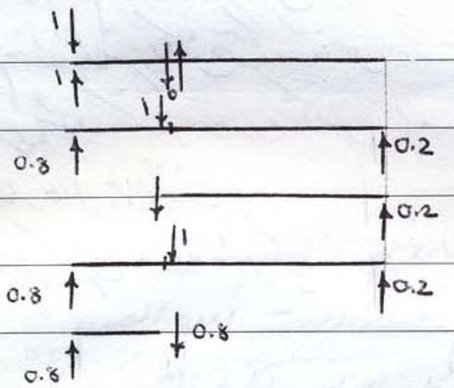



توصیه می شود همیشه خط تأثیر واکنش های تکیه گاهی را قبل از حل مسئله رسم کنید.

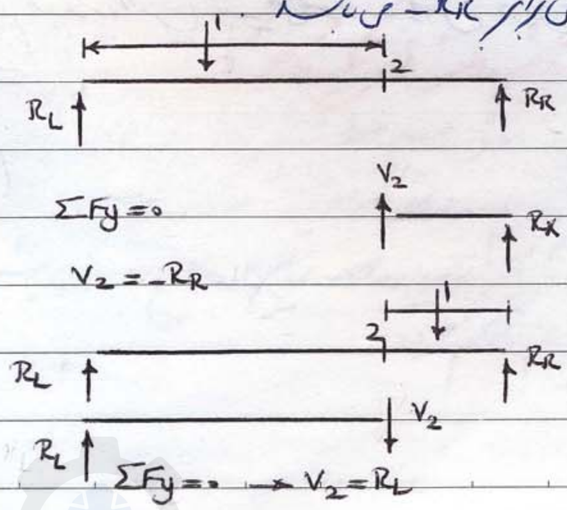
1) روش نقطه یابی: در این روش بار واحد در چند نقطه مختلف بر روی تیر قرار داده شده و به کمک آن مقدار تابع به دست آمده و خط تأثیر رسم می گردد. در خصوص نیروی برشی سمت چپ و راست مقطع جزء نقاط کلیدی است و بار واحد باید در آن نقاط قرار داده شود.

برای رسم خط تأثیر نیروی برشی مقطع 2 از روش استدلال استاتیکی استفاده می نماییم

این روش می تواند در بسیاری از مسائل به کار گرفته شده و باعث سهولت در حل مسائل گردد. در روش استدلال استاتیکی، خط تأثیر مورد نظر را به خطوط تأثیری که قبلاً رسم شده اند مربوط می نماییم.

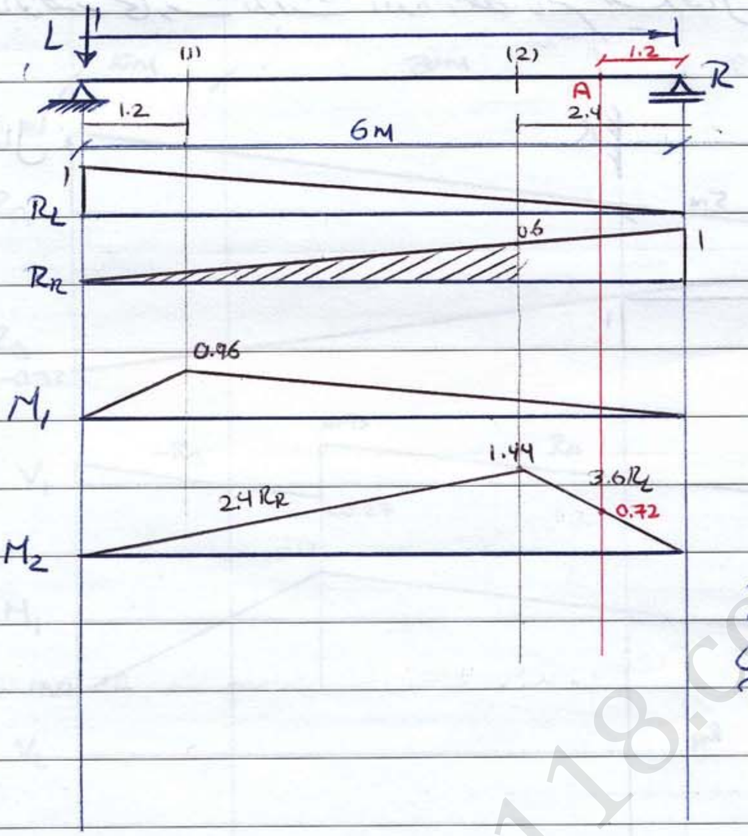



هنگامی که بار واحد در سمت چپ نقطه 2 قرار دارد نیروی برشی برابر $-R_R$ می باشد




* بار واحد هر طرف مقطع مورد بررسی بود برای طرف دیگر رابطه تعادل (استدلال استاتیکی) بنویسید.

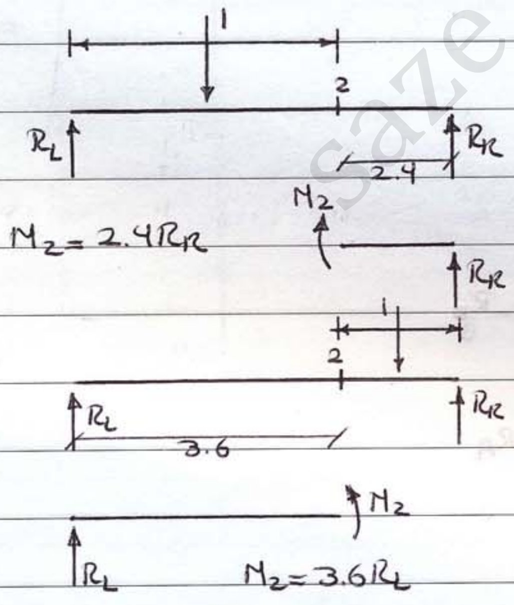
## خط تاثیر لنگر خمشی برای دهانه ساده :




1) انتگرال‌یابی : در روش نقطه‌یابی بار واحد را در روی چند نقطه کلیدی در روی سازه قرار می‌دهیم و به ازای هر موقعیت مقدار تابع را محاسبه می‌کنیم . در مورد لنگر خمشی تکیه‌گاه‌ها که در محور مقطع نقاط کلیدی می‌باشند .

2) استدلال استاتیکی : در این روش خط تاثیر مورد نظر به توابعی مربوط است که خط تاثیر آنها قبلاً رسم شده است . بهترین توابع واکنش‌های تکیه‌گاهی اند .

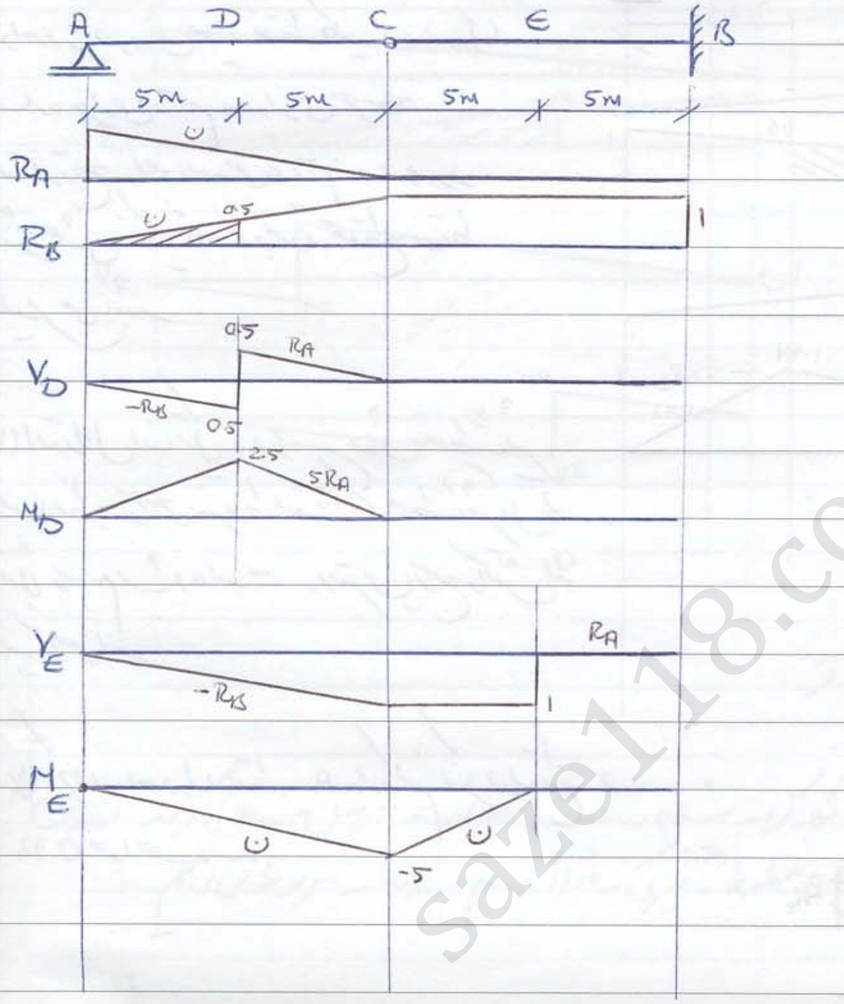
* اگر بار واحد را در نقطه A وارد کنیم لنگر در مقطع 2 0.72 خواهد شد .

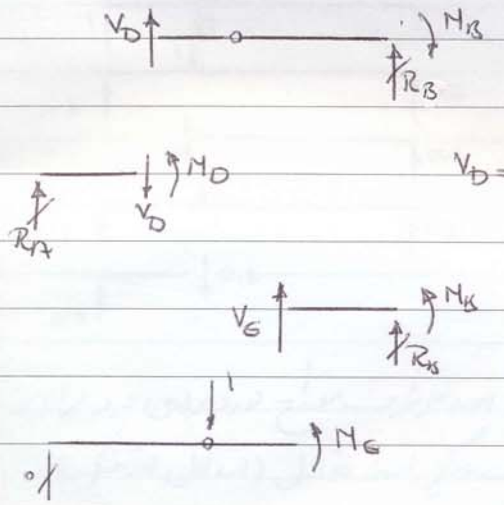


## منحنی تأثیر برای تیرهایی با شرایط تکیه‌گاهی خاص متفاوت

با توجه به نتایج بدست آمده، منحنی تأثیر چند مثال ارائه می‌گردد.

مثال ۱:



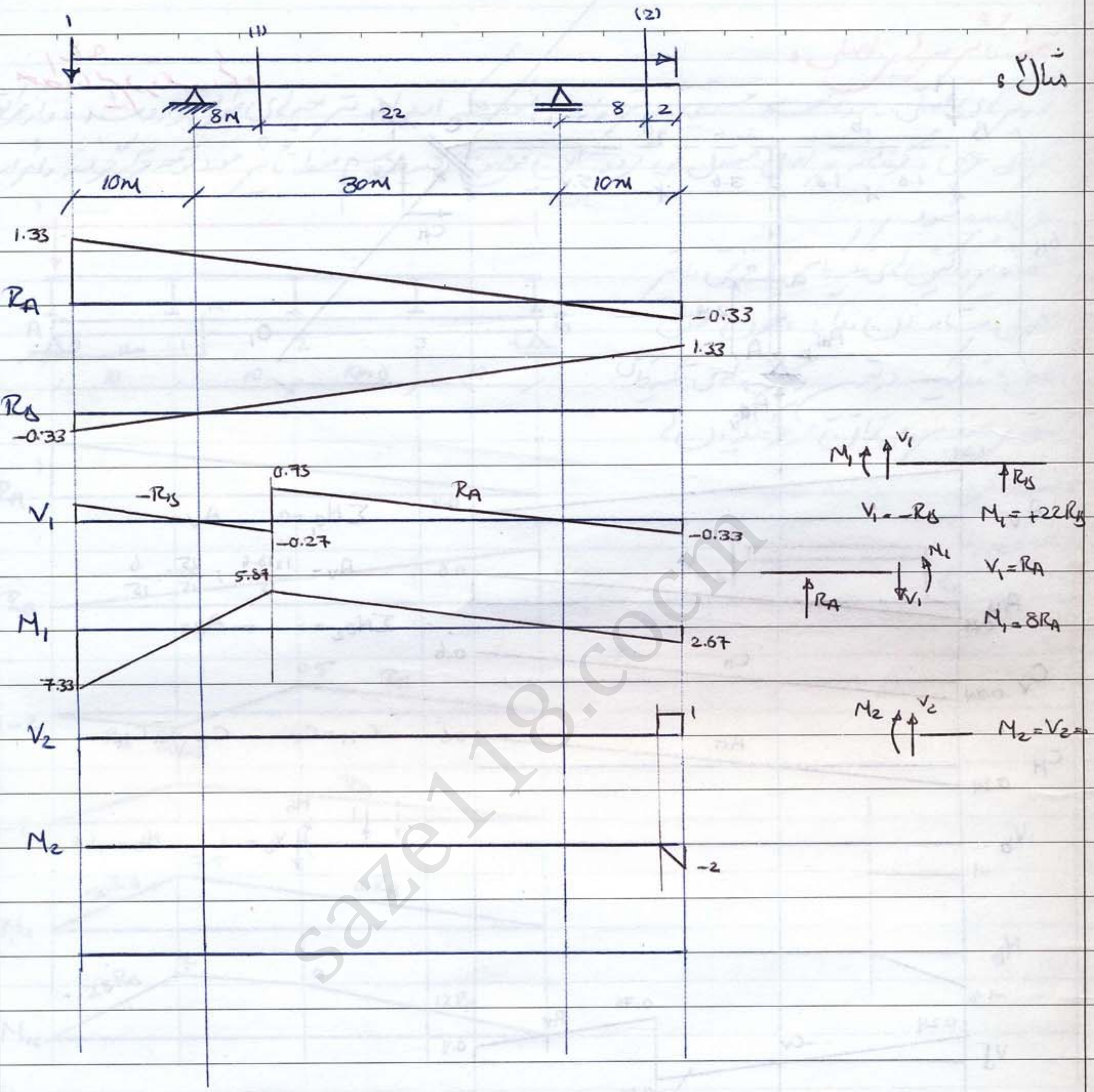

$V_D = -R_B$

$V_D = R_A \qquad M_D = 5R_A$

$V_E = -R_B$

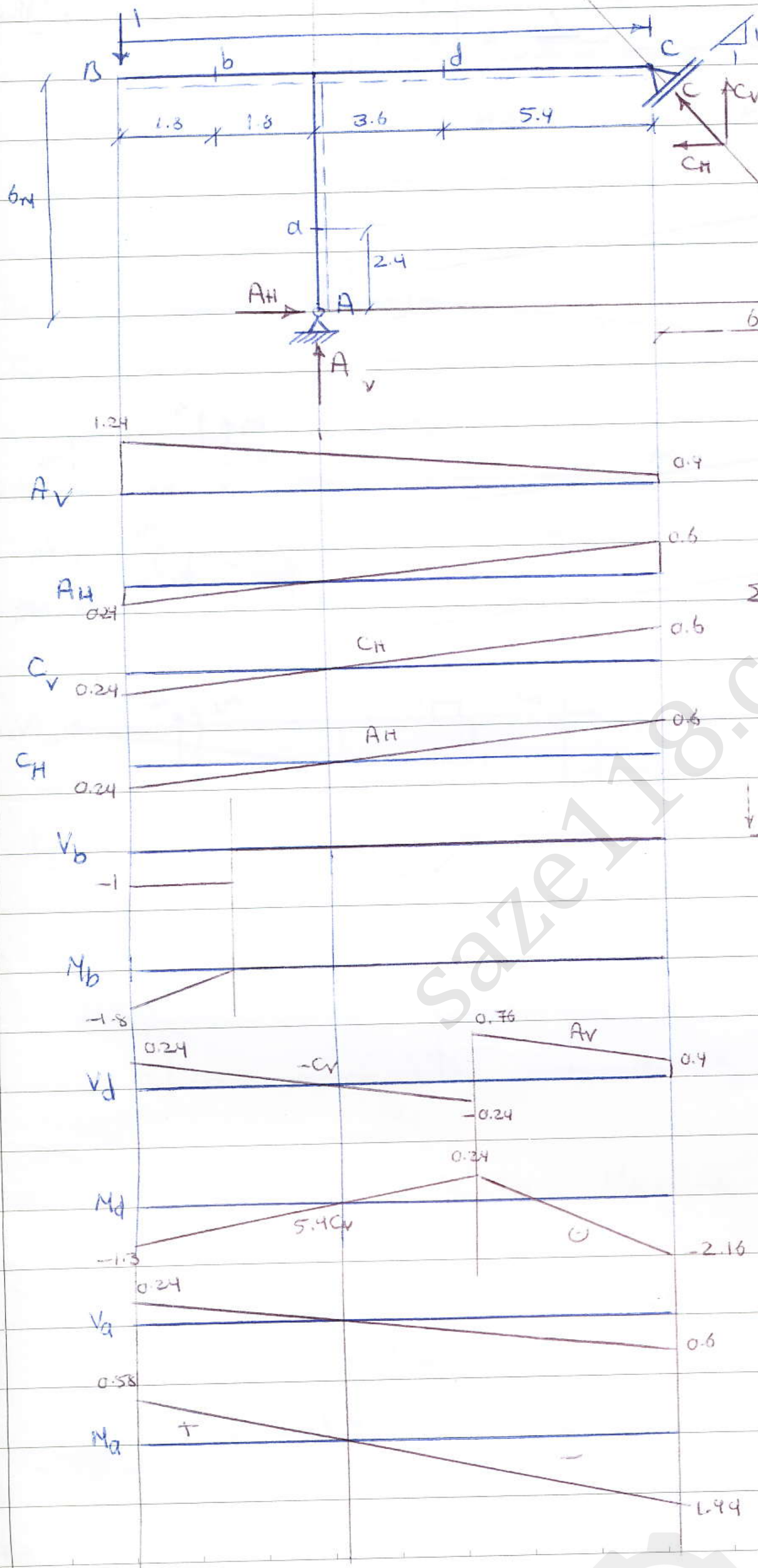
$M_E = -5$

مثال ۲



1
(1)
(2)
8M
22
8
2
10M
30M
10M
1.33
RA
-0.33
1.33
RB
-0.33
V1
-RB
RA
0.73
-0.27
-0.33
M1
5.87
7.33
2.67
V2
1
M2
-2
V1 = -RB
M1 = +22RB
V1 = RA
M1 = 8RA
M2 = V2 =

۹۶-۱



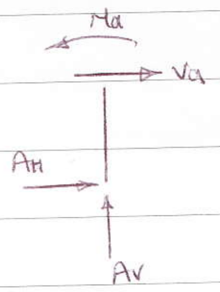
$\sum M_{O_1}=0 \rightarrow A_V=$

$A_V = \frac{1\times 18.6}{15}, \frac{15}{15}, \frac{6}{15}$

$\sum M_{O_2}=0 \rightarrow A_H=$

$C_H = C_V \qquad C=\sqrt{2}\,C_H$

$V_b=-1 \qquad M_b=-1.8$

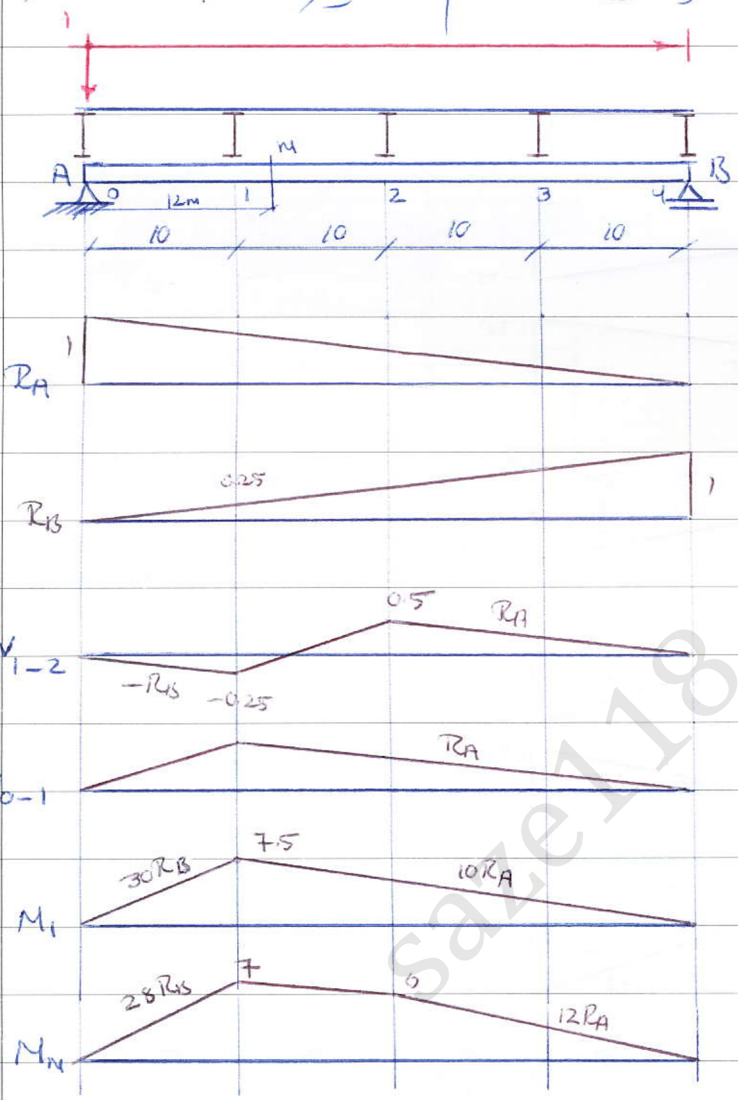


$V_a=-A_H$

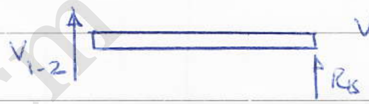
$M_a=-2.4A_H$

## خط تأثیر تیرهای اصلی :

در تیرهای اصلی بار واحد مستقیماً به تیر وارد نمی‌شود بلکه ابتدا به تیرچه‌های طولی وارد شده و از طریق تیرهای عرضی و گره‌ها به تیر اصلی منتقل می‌گردد. این موضوع باید در رسم خط تأثیر مورد توجه قرار گرفته و اثرات آن دیده شود.



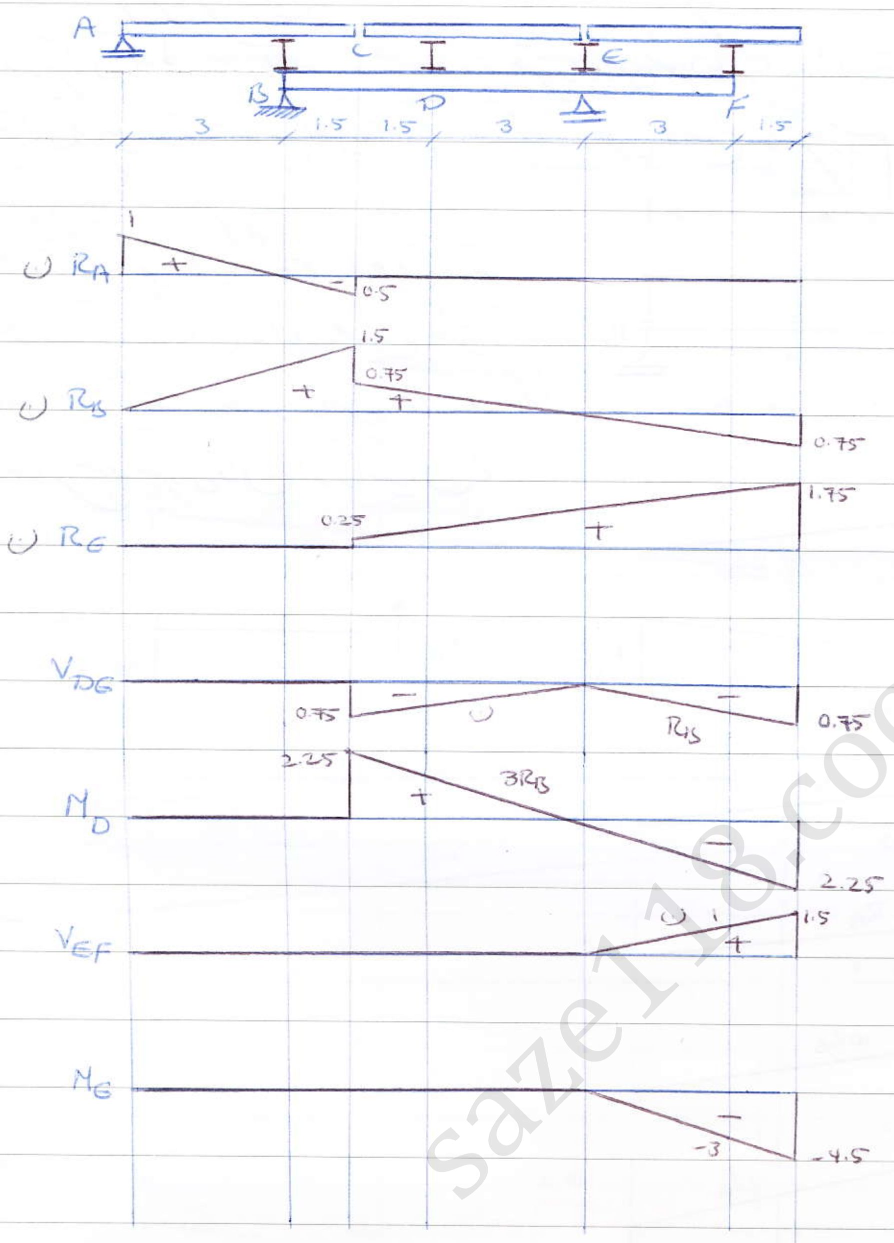

خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی : فرقی با تیر معمولی مشابه آن ندارد، چون طبق اصل استاتیک در تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی به جای چند نیرو می‌توان از برآیند آن‌ها استفاده کرد.




$V_{1-2} = -R_B$

* در تیرهای اصلی برش در هر چشمه یک عدد ثابت می‌باشد.

** از خط تأثیر نقطه‌ای درون چشمه را خواستند هر طرف که بار واحد بود طرف دیگر را در نظر گرفته و $\Sigma M$ می‌نویسیم. سپس نمودار خط تأثیر را اصلاً برای سمت چپ از ابتدای سمت چپ تیر تا تیر عرضی سمت چپ رسم می‌کنیم و وارد چشمه نمی‌شویم. برای سمت راست هم همین کار را انجام می‌دهیم و سپس دو نقطه در تیر عرضی چپ و راست را به هم وصل می‌کنیم

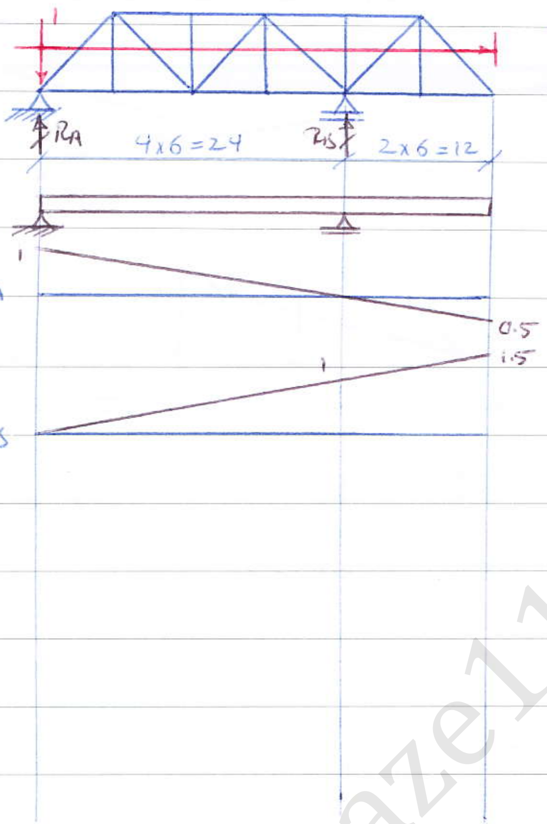


A
B
C
D
E
F
3
1.5
1.5
3
3
1.5
RA
1
+
-
0.5
RB
1.5
0.75
+
+
0.75
RE
0.25
1.75
+
VDG
0.75
-
-
RB
0.75
MD
2.25
3RB
+
-
2.25
VEF
1
+
1.5
MG
-
-3
-4.5

## خطوط تاثیر خرپاها:

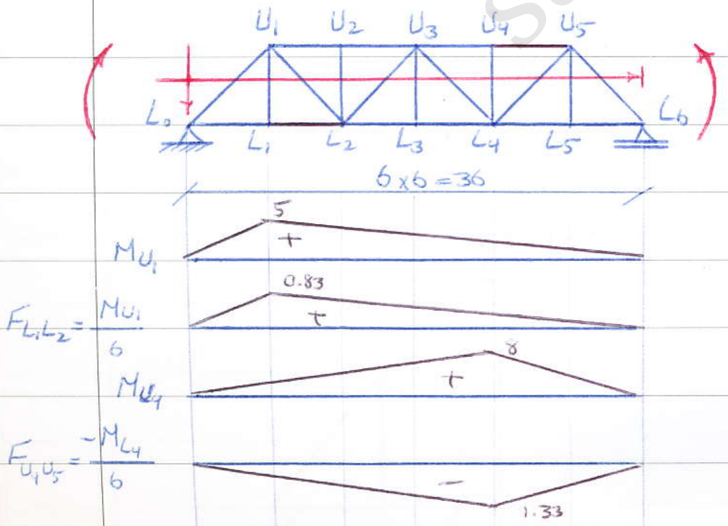
۱) واکنش های تکیه گاهی: خط تاثیر این واکنش ها همانند خط تاثیر واکنش های تکیه گاهی تیر معادل با خرپا می باشد، زیرا ابعادی که به آن ها خارجی نیز مطرح است می توان به جای مولفه های نیرو از تیر اصلی نیرو استفاده نمود.

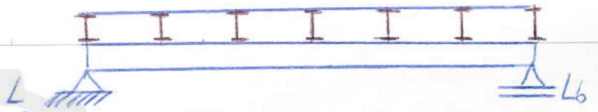
۲) خط تاثیر نیروهای داخلی در خرپاها با بال های موازی:



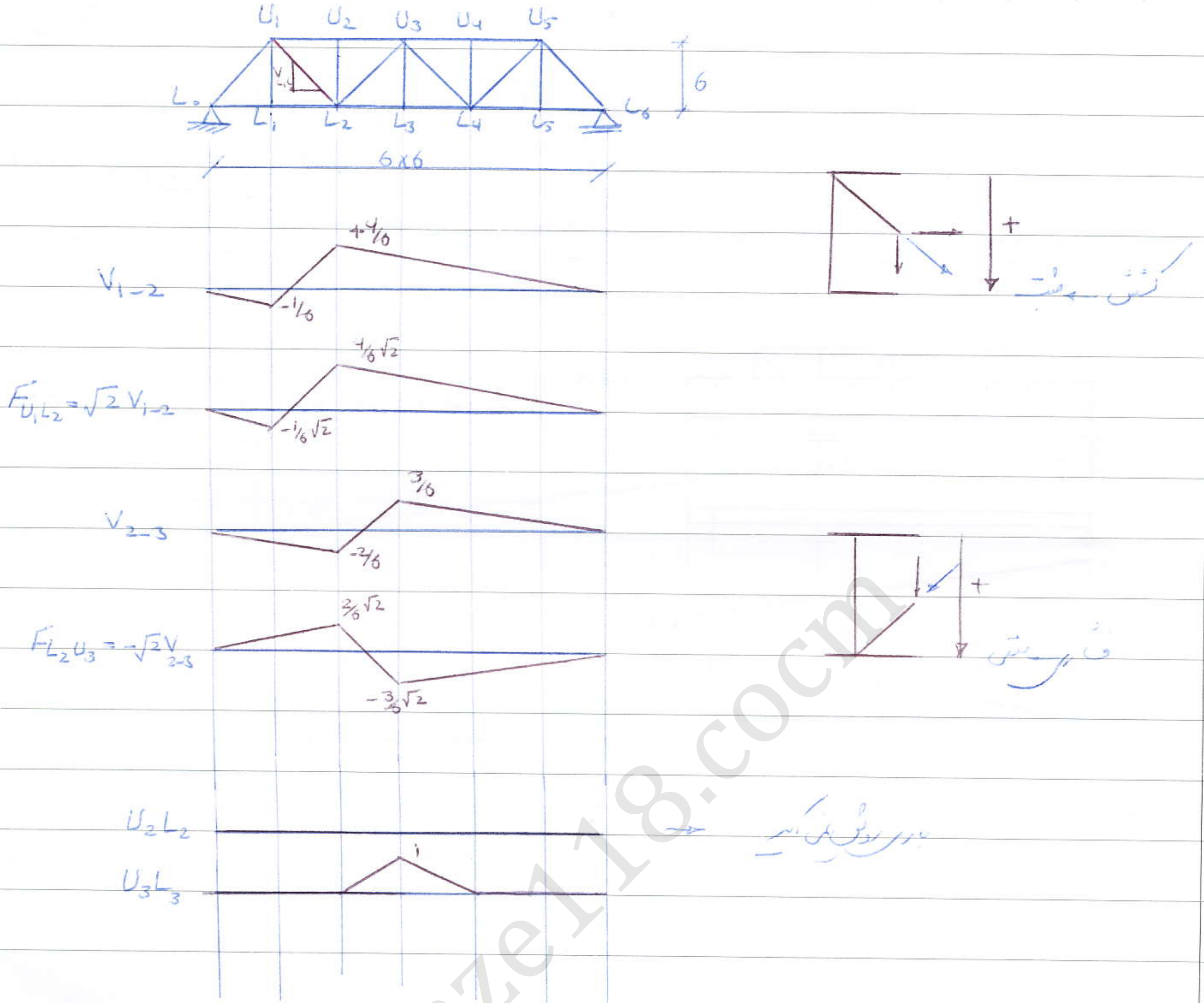

۲) خط تاثیر نیروهای داخلی در خرپاها با بال های موازی:

تیر اصلی هم ارز خرپا در نظر می گیریم. با گرفتن لنگر در محل $U_1$ می توان نیروی $L_1L_2$ را به دست آورد. برای رسم خط تاثیر $L_1L_2$ این نکته را توضیح می کنیم که نیروی این عضو برابر است با لنگر در $U_1$ تقسیم بر 6 متر. حال اگر یک تیر اصلی معادل خرپا در نظر گرفته و برای آن $M_{U_1}$ را به دست می آوریم می توانیم خط تاثیر را بر اساس آن رسم کنیم.

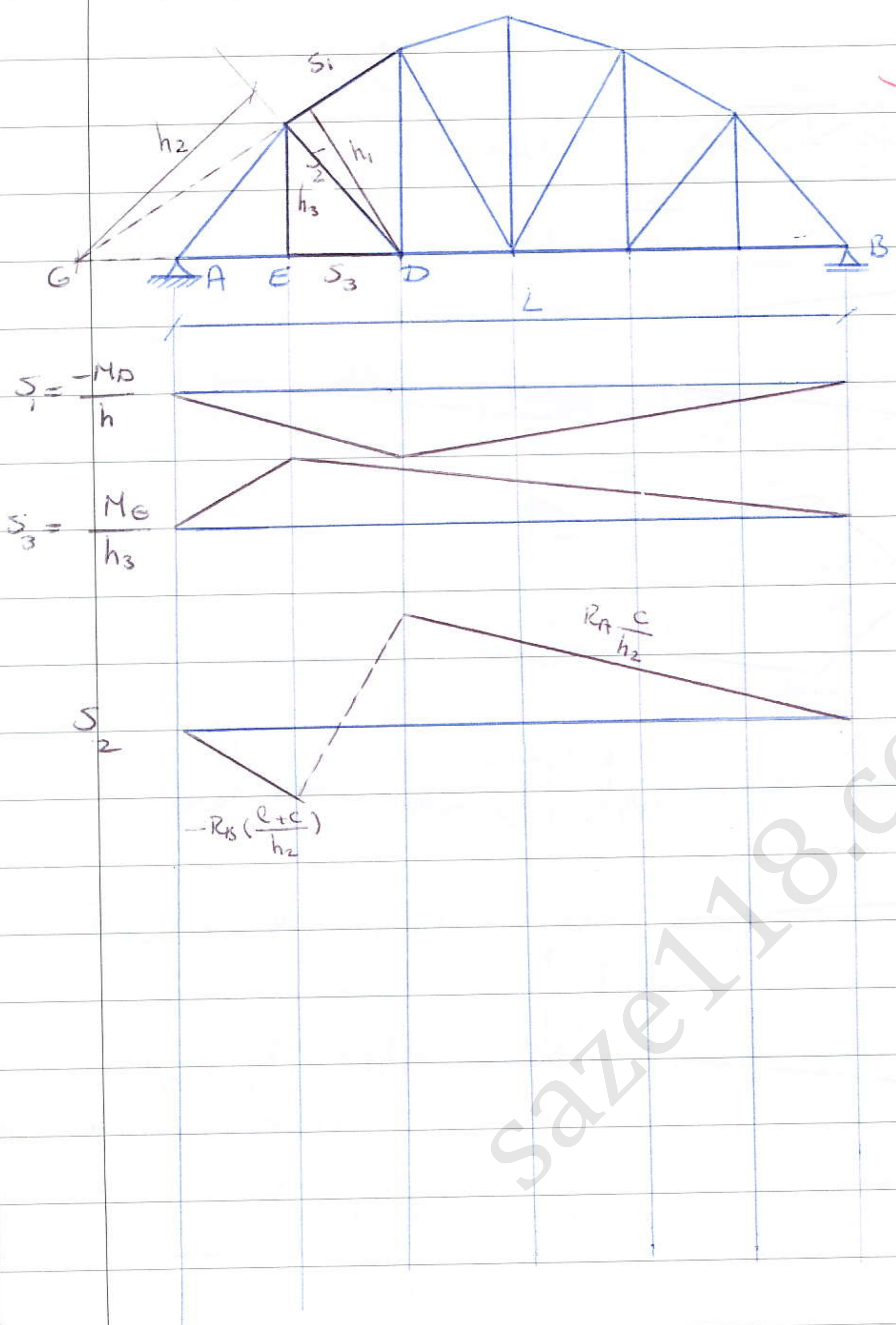



* چون تار بالا فشاری است $F_{U_4U_5}$ منفی می باشد.


U1 U2 U3 U4 U5
L0 L1 L2 L3 L4 L5 L6
6
6x6
V1-2
+4/6
-1/6
F U1L2 = √2 V1-2
4/6 √2
-1/6 √2
V2-3
3/6
-2/6
F L2U3 = -√2 V2-3
2/6 √2
-3/6 √2
U2L2
U3L3
1
+

## ۵-۴-۱ خط تأثیر خرپا با بال‌های غیر موازی:




مرکز گشتاور $S_2$، G است.

$$S_2 h_2 + R_B(l+c) = 0$$

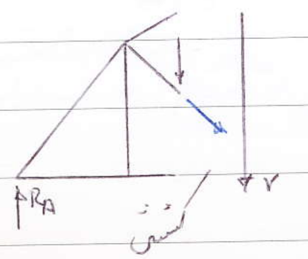
$$S_2 = -R_B \frac{l+c}{h_2}$$

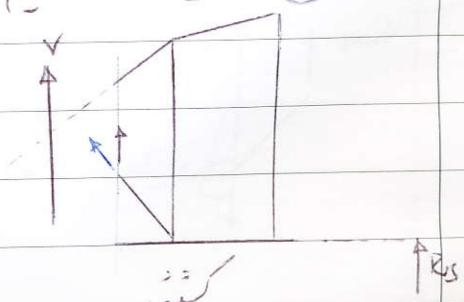
$$R_A c = h_2 S_2 \rightarrow S_2 = R_A \frac{c}{h_2}$$

در محاسبه $S_2$:

برای بار واحد بین A تا E داریم:

برای بار واحد بین D تا B داریم:

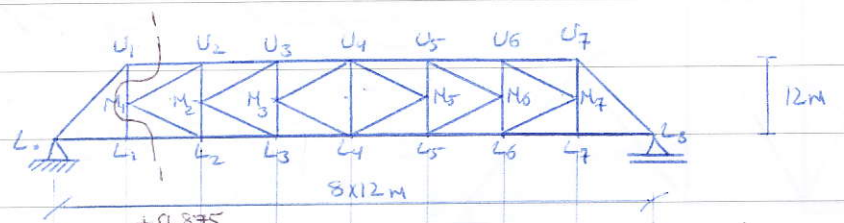


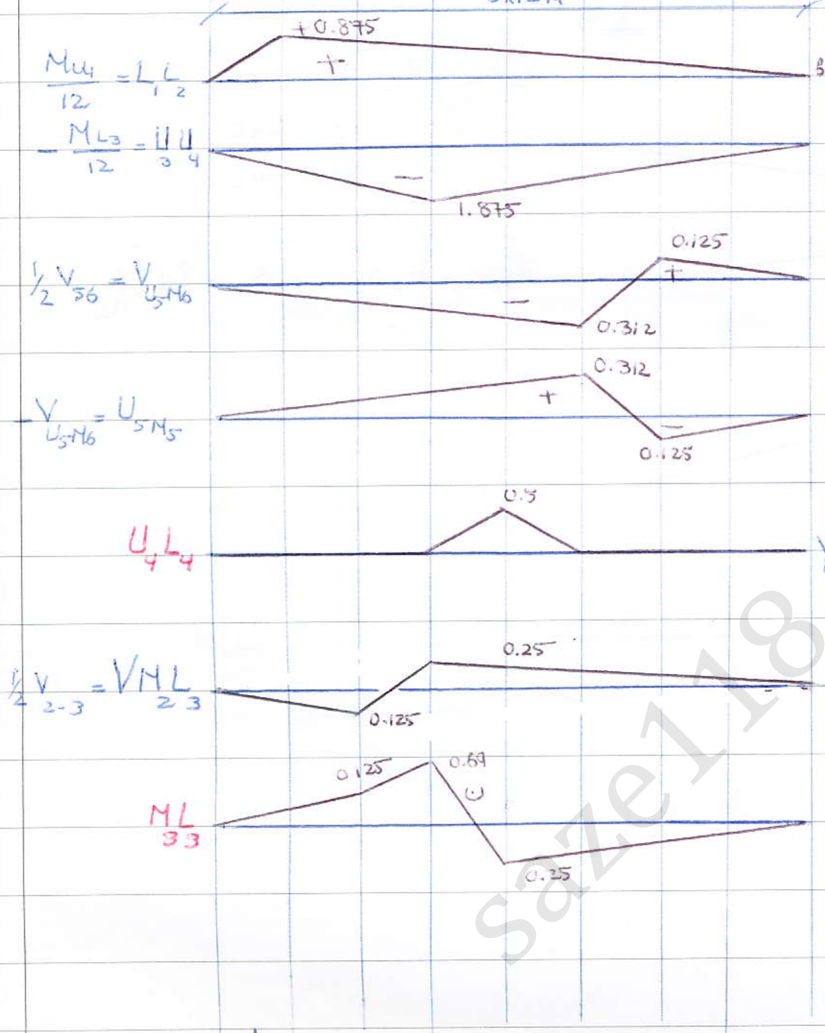



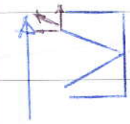

$$-S_2 h_2 + R_A c = 0$$

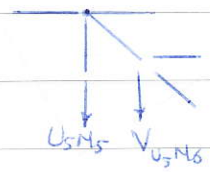
$$+S_2 h_2 + R_B(l+c) = 0$$

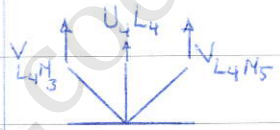
# خطوط تاثیر خرپای K



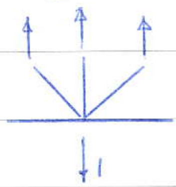





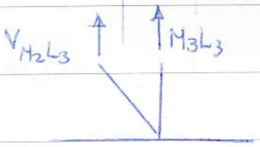




$\Sigma F_y = 0 \rightarrow U_4L_4 = -(V_{L_4M_3} + V_{L_4M_5}) = 0$



$U_4L_4 = -(V_{L_4M_3} + V_{L_4M_5}) + 1$

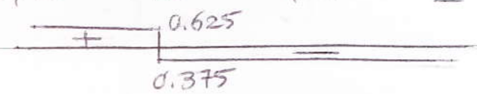
$= -(0.25 + 0.25) + 1 = 0.5$

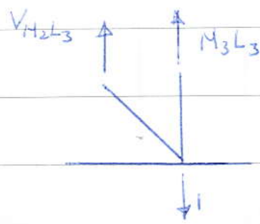



$M_3L_3 = -V_{M_2L_3}$

برای $L_3$ بار واحد را اعمال می‌کنیم.

$V_{L_4M_3} = -\frac{0.375}{2}$ $\quad V_{L_4M_5} = +\frac{0.375}{2}$



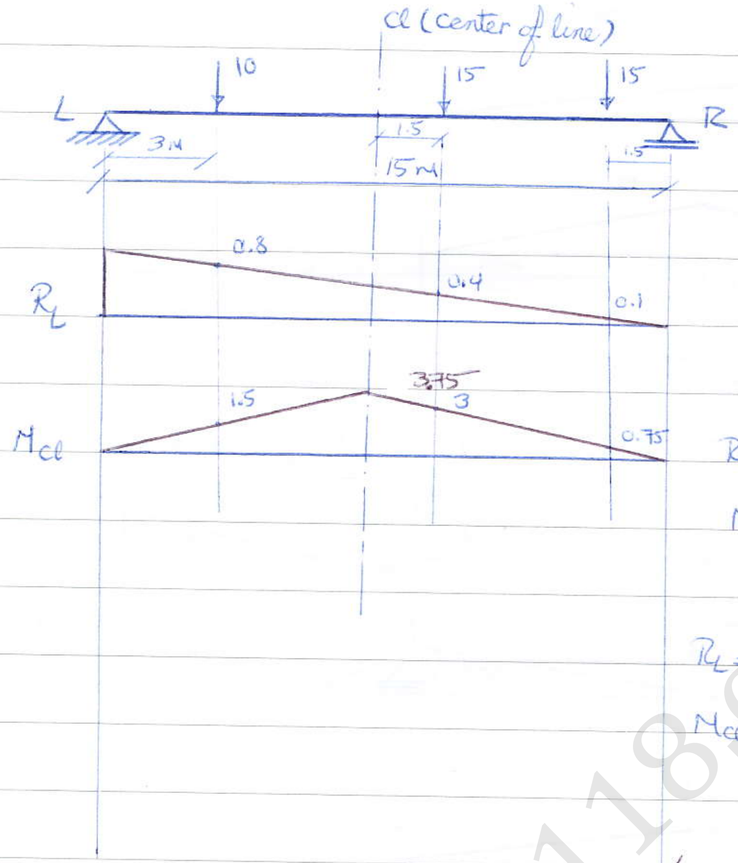




$M_3L_3 = 1 - V_{M_2L_3}$

$= 1 - 0.3125 = 0.69$

# کاربرد خطوط تأثیر

## ۱) کاربرد خطوط تأثیر برای نیروهای با موقعیت ثابت.




اگر بار واحد در فاصله 3 متری از چپ باشد:

$R_L = 0.8$ $\qquad$ $M_{cl} = 1.5$

اگر بار 10 باشد:

$R_L = 0.8 \times 10$ $\qquad$ $M_{cl} = 1.5 \times 10$

اگر بار 15 را هم در سمت راست اضافه کنیم:

$R_L = 0.8 \times 10 + 0.1 \times 15$

$M_{cl} = 1.5 \times 10 + 0.75 \times 15$

اگر بار 15 را در 1.5 متری از cl وارد کنیم:

$R_L = 0.8 \times 10 + 0.1 \times 15 + 15 \times 0.9 = 15.5 \text{ ton}$

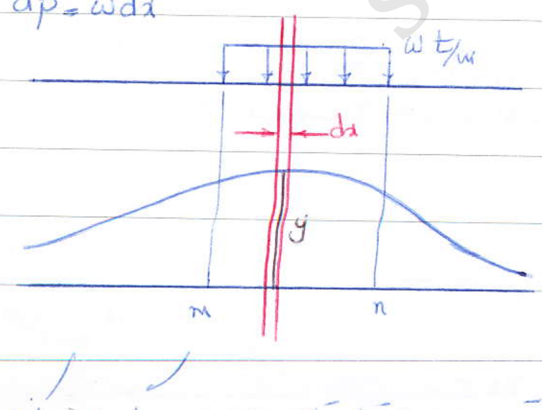
$M_{cl} = 1.5 \times 10 + 0.75 \times 15 + 15 \times 3 = 71.25$

مقدار تابع به علت بارهای متمرکز $= \sum P_i y_i$

$y_i$: عرض خطوط تأثیر در زیر بارهای متمرکز

## ۲) کاربرد خطوط تأثیر برای بارهای گسترده یکنواخت.

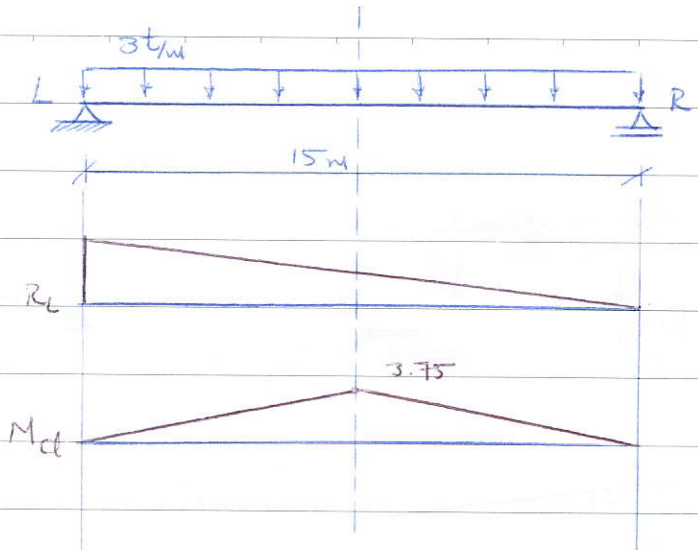
$dp = w\,dx$




$dF = (w\,dx)\,y$

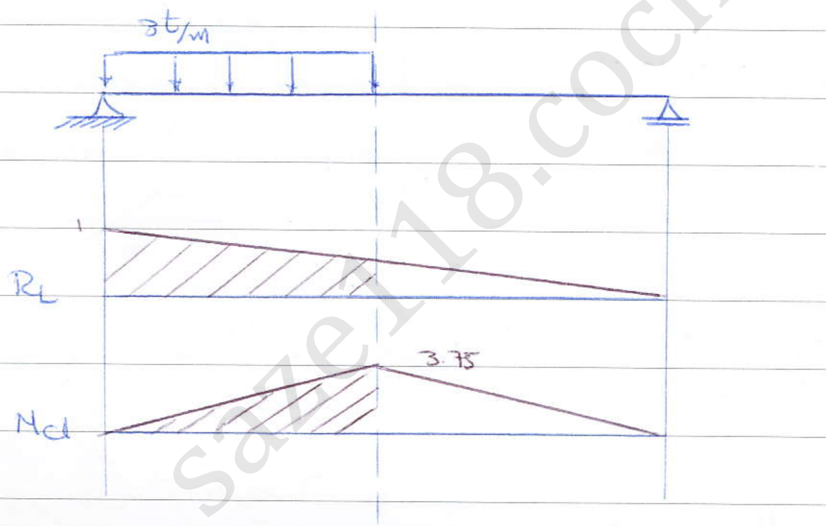
$F = \int_m^n w\,dx\,y = w \int_m^n y\,dx = w$ (سطح زیر خطوط تأثیر بین n, m)

مقدار تابع به علت بار گسترده یکنواخت = شدت بار گسترده × سطح زیر نمودار (خطوط تأثیر) در محدوده محل بار گسترده




$R_L = 3\left(\frac{1}{2}\times 15\times 1\right) = 22.5$ ton

$M_{cl} = 3\times 15\times \frac{3.75}{2} = 84.4$ ton.m




$R_L = 3\times \frac{1}{2}\times 7.5\,(1+0.5) = 16.9$ ton

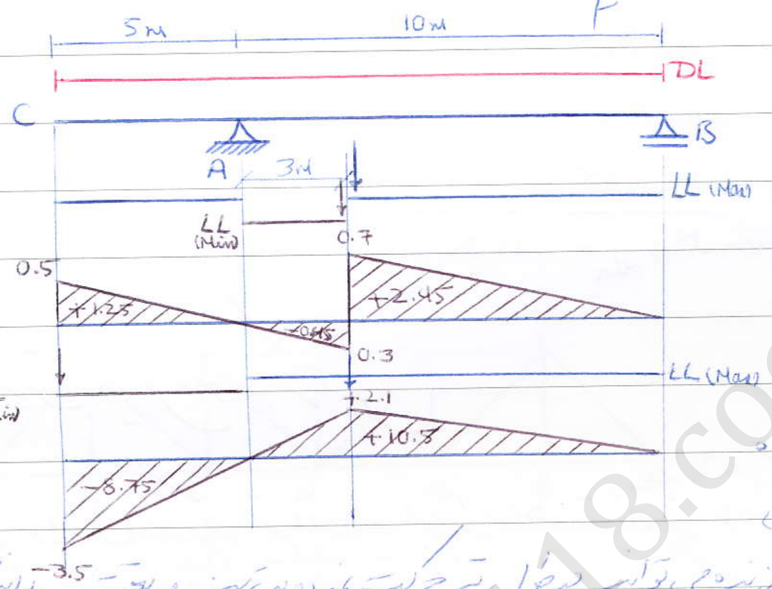
$M_{cl} = 3\times 7.5\times \frac{3.75}{2} = 42.2$

۳) کاربرد خطوط تأثیر برای بارها با موقعیت متغیر:

در هنگام استفاده از خطوط تأثیر برای بارها با موقعیت متغیر ابتدا باید موقعیت نامساعد بار معلوم گردد و سپس برای این موقعیت نامساعد مقدار تابع حساب می شود.

موقعیت نامساعد موقعیتی است که باعث ایجاد حداکثر و حداقل تابع گردد. منظور از حداکثر، حداکثر مثبت و منظور از حداقل، حداکثر منفی است.

برای نشان دادن موضوع از مثالی استفاده می کنیم




۱) بار مرده گسترده یکنواخت $1\ t/m$

۲) بار زنده متمرکز برابر 10 تن

۳) بار زنده گسترده برابر $5\ ton/m$

توضیح: بار مرده همواره در تمام طول سازه قرار دارد. تغییر مکان نامحدود متغیری ایجاد بار امکان پذیر نیست. اما بار زنده می تواند در طول تیر حرکت کند و در بدترین موقعیت را اشغال کند و در مورد بار گسترده می توان در قسمت‌هایی از آن را حذف نمود. با این حقیقت حالا بررسی می کنیم $V_{D\,Max}$.

$V_{D\,Max}$:

اثر بار مرده: $= 1(1.25 - 0.45 + 2.45) = 3.25\ t$

بار زنده گسترده $= 5(1.25 + 2.45) = 18.5$

زنده متمرکز $= 10 \times 0.7 =$

$\Longrightarrow V_{D\,Max} = 28.75\ t$

$V_{D\,Min}$:

اثر بار مرده $= \quad = 3.25$

بار زنده متمرکز $= 3(-0.45) \quad = -2.25$

بار گسترده متمرکز $= -0.3 \times 10 \quad = -3$

$\Longrightarrow V_{D\,Min} = -2\ ton$

بار زنده گسترده: Live Load (LL)

بار مرده گسترده: Dead Load (DL)

* $M_{D_{Max}}$ :

بار مرده $= 1(-8.75 + 10.5) = 1.75$

بار زنده گسترده $= 5 \times 10.5 = 52.5$

بار زنده متمرکز $= 10 \times 2.1 = 21$

$\Longrightarrow M_{D\,Max} = 75.25\ t.m$

$M_{D_{Min}}$ :

بار مرده $= 1.75$

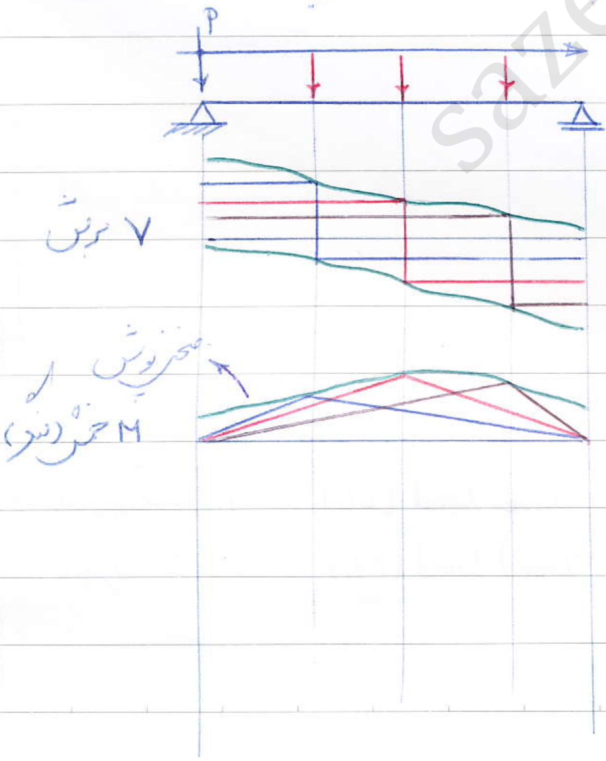
بار زنده گسترده $= -43.75$

بار زنده متمرکز $= -35$

$\Longrightarrow M_{D_{Min}} = -77\ ton.m$

## منحنی پوش نیروی برشی و لنگر خمشی:

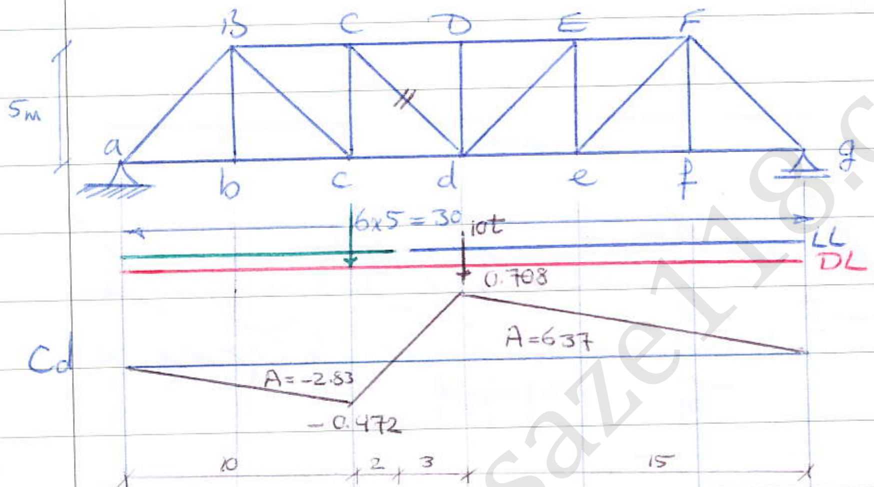
وقتی که بارهای وارده به تیر یا قاب از نظر موقعیت ثابت باشند برای طراحی از نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی استفاده می‌شود که در فصول گذشته مورد تشریح قرار گرفتند. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بارهای وارد بر سازه متحرک باشند معیار طراحی چه باید باشد؟ مثال کوچکی برای درک مطلب ارائه می‌گردد.



روش عملی برای رسم منحنی پوش این است که در یک تیر چند نقطه مشخص در نظر بگیریم. تعداد این نقاط بین چهار نقطه تا هشت نقطه در هر دهانه کفایت می‌کند. برای این نقاط باید خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی رسم گردد. سپس با بارهای مرده و زنده روی این خطوط تأثیر اعمال شده و حداقل و حداکثر جواب‌ها در آن نقطه مشخص می‌گردد. با وصل کردن نقاط حداقل به یکدیگر منحنی پوش حداقل و با وصل کردن نقاط حداکثر منحنی پوش حداکثر بدست می‌آید.

## مقادیر حداقل و حداکثر نیرو در خرپا به علت بار متحرک

در یک خرپا نیرو به علت حرکت بار واحد نیروی داخلی اعضا عوض می‌شود. در واقع حرکت بار باعث می‌گردد نیروی عضو حداقل و حداکثر گردد.




| | |
|---|---|
| بار مرده گسترده یکنواخت | 1.5 t/m |
| بار زنده گسترده یکنواخت | 2 t/m |
| نیروی متمرکز زنده | 10 t |
| اثر ضربه | 22.4% |

اثر ضربه: در نتیجه اعمال ناگهانی بار می‌باشد. در اثر اعمال ناگهانی بار مقدار نیرو از حالت استاتیکی بزرگتر می‌شود. این به واسطه انرژی مربوط هنگام اعمال بار است. اثر ضربه فقط به بار زنده اعمال می‌گردد و برای مرده نخواهیم داشت.

$D_L = 1.5(6.37 - 2.83) = 5.31$

$LL = 2 \times 6.37 + 10 \times 0.708 = 19.82$

$I = 0.244 \times 19.82 = +4.84 \quad \Rightarrow \quad F_{Cd_{Max}} = 29.97t$

$+29.97t$ کشش

$F$

$DL = 5.31$

$LL = 2 \times (-2.83) = -5.65$

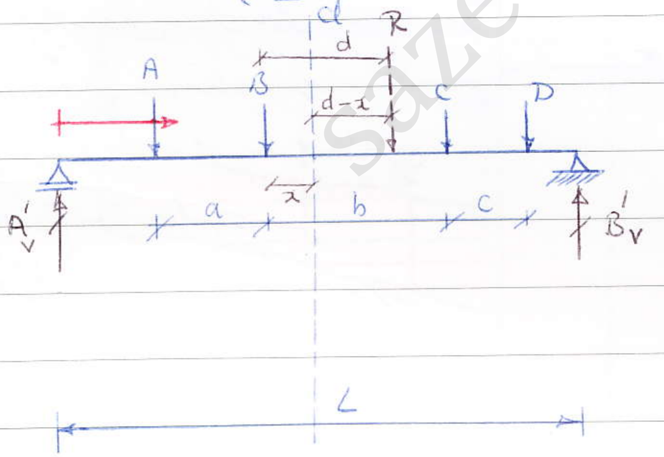
$+10(-0.472) = -4.72 \quad \Rightarrow \quad F_{Cd_{Min}} = -7.6t$

$I = 0.244 \times (-5.66 - 4.72) = -2.53$

$-7.6t$

لنگر خمشی حداکثر مطلق در یک تیر ساده تحت سیستم بارهای متمرکز متحرک (در صورتی که از ضربه صرف نظر شده است)

این موضوع ارتباطی با خط تأثیر ندارد و موضوعی مستقل است ولی در حل مسئله زمینه حق در حداکثر تابع می‌باشد




چون مجموعه بار متمرکز داریم لنگر خمشی حداکثر بدون شک زیر یکی از بارها رخ می‌دهد.
فرض می‌کنیم این حداکثر زیر بار B باشد
برآیند بارها را R در نظر می‌گیریم
x را طوری تعیین می‌کنیم تا لنگر زیر بار B حداکثر گردد.

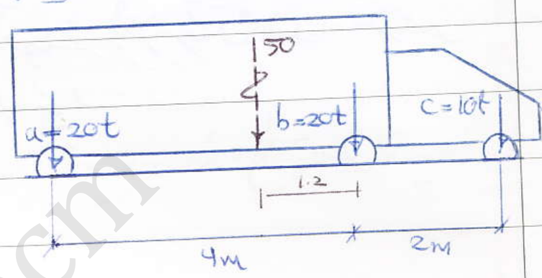
$$A'_v = \frac{1}{L}(R)\left(\frac{l}{2} - (d-x)\right) = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$

$$M_B = A_v\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa = \left(\frac{R}{2} + \frac{Rx}{l} - \frac{Rd}{L}\right)\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa$$

$$M_{15} = \frac{RL}{4} - \frac{Rd}{2} - \frac{Rx^2}{L} + \frac{Rxd}{L} - Aa \rightarrow \frac{dM_{15}}{dx} = 0 \rightarrow -\frac{2Rx}{L} + \frac{Rd}{L} = 0$$

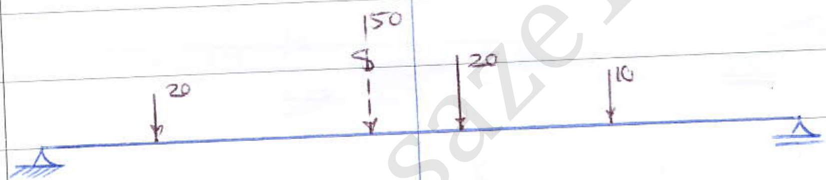
$$\rightarrow x = d/2$$

لنگر در زیر یک بار متمرکز وقتی حداکثر است که وسط دهانه در وسط فاصله این بار متمرکز و برآیند قرار گیرد.
این لنگر ممکن است بزرگترین لنگر نباشد و بنابراین باید آن را برای بارهای متمرکز دیگر هم بررسی کنیم. ولی تجربه نشان می‌دهد لنگر حداکثر مطلق در زیر بزرگترین و نزدیکترین بار به برآیند رخ می‌دهد

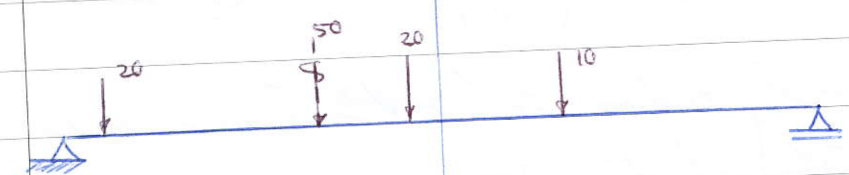





$M_a = 64.8$ ton.m

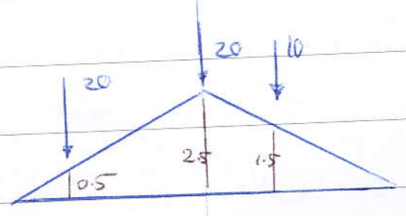



$M_b = 76.8$ حداکثر مطلق




$M_c = 57.6$

حل از روش مختصر ۹۷.۶٪




$M_{cl}$

$$M_{cl} = 20 \times 0.5 + 20 \times 2.5 + 10 \times 1.5$$
$$= 10 + 50 + 15 = 75$$

حمید کاظم

فصل پنجم

# تغییر شکل سازه‌ها

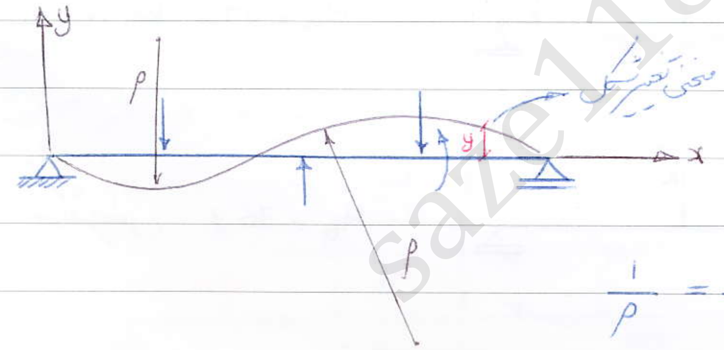
در این فصل تغییر شکل سازه‌های معین مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای محاسبهٔ تغییر شکل سازه‌ها دو روش مورد توجه قرار خواهد گرفت:

۱) روش هندسی: در این روش معادلهٔ دیفرانسیل تغییر شکل اعضای خمشی مورد توجه قرار گرفته و از روش‌های ترسیمی برای حل آن استفاده می‌شود.

۲) روش انرژی: ملاحظه می‌گردد روش‌های انرژی در دروس وسیعی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها بدست می‌دهند. به کمک روش‌های انرژی می‌توان تغییر شکل سازه‌های معین را در اثر نیروهای محوری، لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروی برشی محاسبه نمود و هیچ محدودیتی برای آن وجود ندارد.

## محاسبه تغییر شکل‌های ناشی از خمش در تیرها - استخراج معادله دیفرانسیل خمش الاستیک:

از درس مقاومت مصالح می‌دانیم که شعاع انحنای $\rho$ یک تیر و لنگر خمشی آن رابطه زیر برقرار است:




$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

از هندسه تحلیلی:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

در کلیه سازه‌ها با تغییر شکل‌های کوچک سروکار داریم. تغییر شکل کوچک تغییر شکلی است که در هندسه اولیه تغییر محسوسی ایجاد نمی‌کند. به عنوان مثال تغییر شکل حداکثر یک تیر حدود $\frac{L}{300}$ را مجاز است یعنی اگر دهانه تیری 6m باشد تغییر شکل حداکثر آن حدود 2cm خواهد بود. این مقدار نمی‌تواند هندسه اولیه تیر را بهم بزند. در تغییر شکل‌های کوچک با تقریب خوب می‌توان $y'^2$ را در مقابل یک صفر فرض کرد؛ چون $y'$ بسیار کوچک است و وقتی به توان دو برسد در مقابل یک ناچیز خواهد شد. بنابراین رابطه دیفرانسیل بصورت زیر در می‌آید:

$$y'' = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

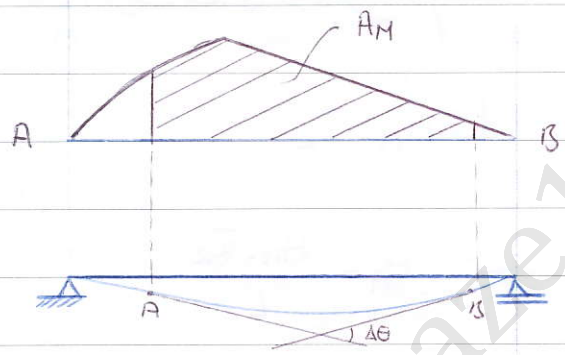
از تلفیق روابط ۱ و ۲ می‌توان نوشت:

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

معادله فوق به معادله دیفرانسیل تغییر شکل عضو خمشی معروف است.

اگر معادله M بدست آید با دوبار انتگرال گیری از آن می‌توان معادله y را بدست آورد. در همه موارد این انتگرال گیری به این سادگی نخواهد بود. در بعضی موارد نیازی به داشتن معادله هم نیست. از دیدگاه یک مهندس تغییر شکل تیر در یک یا چند نقطه حساس مهم‌تر می‌باشد. به همین علت روش‌های عددی برای حل این معادله دیفرانسیل ابداع شده است.

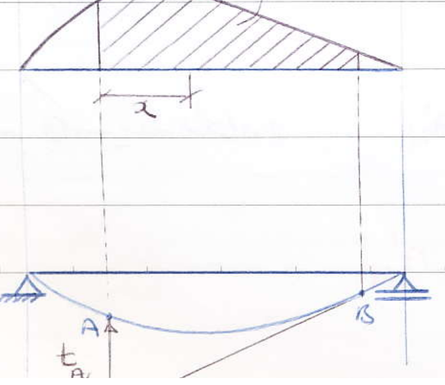
قضیه اول لنگر سطح: زاویه بین مماس‌های مرسوم بر دو نقطه منحنی تغییر شکل برابر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ می‌باشد.




نمودار $\frac{M}{EI}$

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_B = A_M$$

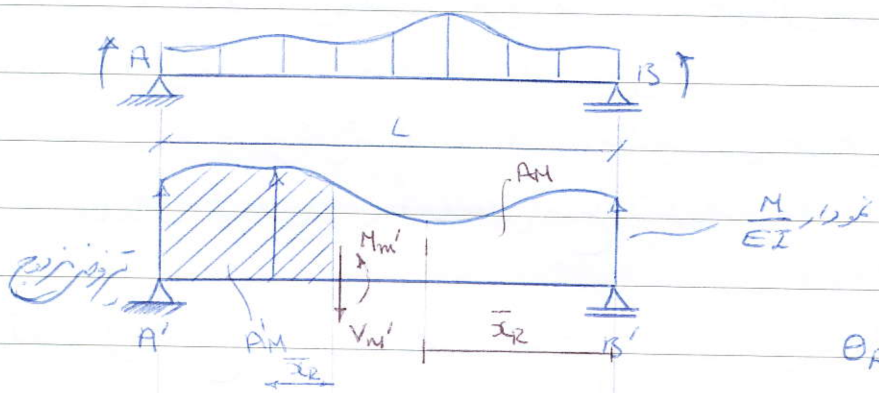
قضیه دوم لنگر سطح: انحراف نقطه A واقع در روی منحنی الاستیک از مماس مرسوم بر نقطه B واقع در روی منحنی الاستیک مساوی با لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین دو نقطه نسبت به نقطه A.



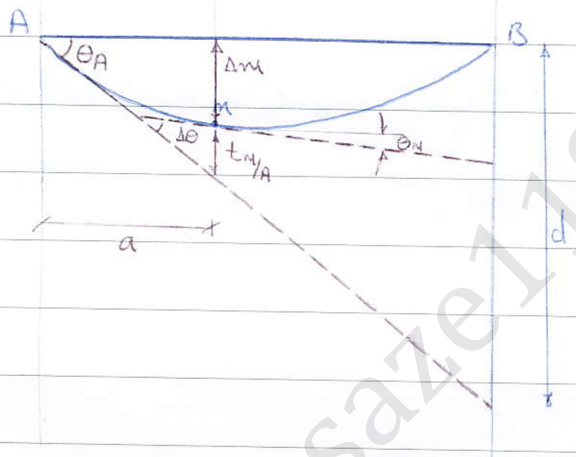

$$t_{A/M} = A_M \cdot x$$

## روش بار الاستیک:

روشی ترسیمی است. بدین معنی که تیری با بارگذاری الاستیک مختری می‌شود. بار الاستیک این تیر نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. ثابت می‌شود که $\theta$ و $\Delta$ در تیر اصلی مثل همه نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر الاستیک یا تیر فرضی است.




$$\theta_A = \frac{d}{l}$$




انحراف نقطهٔ B از مماس رسم شده در A $= d$

$$d = A_M \cdot \bar{x}_R$$

$$\Rightarrow \quad \theta_A = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

در تیر مزدوج:

$$\Sigma M_{B'} = 0 \Rightarrow R_{A'}' = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

مشاهده می‌شود که $\theta_A$ در تیر اصلی مانند $R_A'$ در تیر مزدوج است. تیر مزدوج تیری است هم طول با تیر اصلی که بار وارد بر آن نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. به آن بار الاستیک گویند. در صورتیکه نمودار M مثبت باشد بار الاستیک مثبت بوده و رو به بالا است.

محاسبه $\theta$ یک نقطه دلخواه:

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_M \Rightarrow \theta_M = \theta_A - \Delta\theta \qquad \Delta\theta = A_M'$$

$$\Rightarrow \theta_M = \theta_A - A_M'$$

$$\Rightarrow \theta_M = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L} - A_M'$$

نیروی برشی در تیر مزدوج :

$$V_M' = R_A' - A_M'$$

ثابت می‌شود که نیروی برشی در تیر مزدوج معادل شیب منحنی تغییر شکل در تیر اصلی است. به این نیروی برشی، نیروی برشی الاستیک گویند. از علامت قرارداد نیروی برشی برای آن استفاده می‌گردد. اگر نیروی برشی الاستیک مثبت باشد، شیب مثبت است (شیب رو به بالا). اگر نیروی برشی الاستیک منفی باشد، شیب منفی است (رو به پایین)

محاسبه $\Delta$ نقطه $m$ :

$$\Delta_M = a\theta_A - t_{M/A}$$

$$\Delta_M = aR_A' - A_M' \cdot \bar{x}_R$$

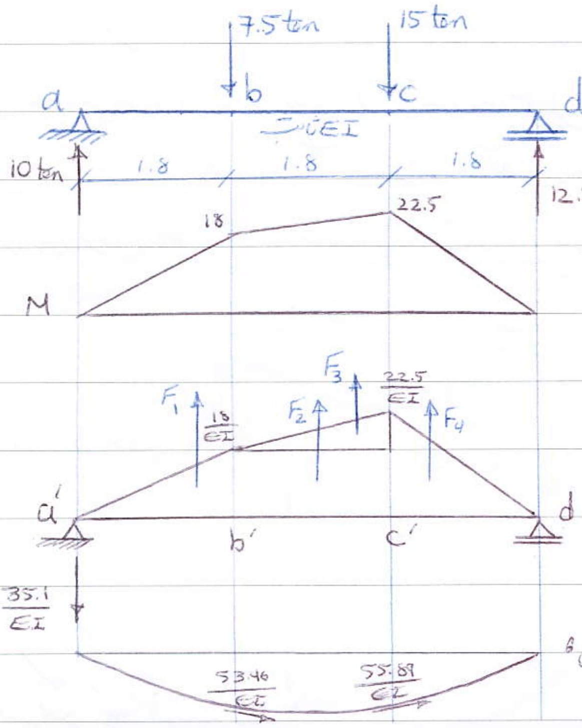
محاسبه لنگر $m$ در تیر مزدوج :

$$\sum M_{M'} = 0 \Rightarrow M_{M'} = R_A' \cdot a - A_M' \cdot \bar{x}_R$$

ثابت می‌شود که میزان تغییر مکان نقطه در تیر اصلی مساوی لنگر خمشی در تیر مزدوج است. به این لنگر، لنگر خمشی الاستیک گویند. لنگر خمشی الاستیک وقتی مثبت است که در تار پایین ایجاد کشش نماید (همان قرارداد علامت سابق). اگر لنگر خمشی الاستیک مثبت باشد تغییر مکان رو به بالا است. اگر لنگر خمشی الاستیک منفی باشد، تغییر مکان منفی بوده رو به پایین است.

$$\frac{dV}{dx} = q \qquad \frac{dM}{dx} = V \longrightarrow y'' = \frac{M}{EI}$$

مثال: در تیر نشان داده شده تغییر مکان قائم و دوران نقاط A، B، C، D و هم چنین مقدار تغییر مکان حداکثر را بدست آورید.




نمودار تغییر شکل

$$F_1 = \frac{1.8}{2} \times \frac{18}{EI} = \frac{16.2}{EI}$$

$$F_2 = \frac{32.4}{EI} \qquad F_3 = \frac{4.05}{EI} \qquad F_4 = \frac{20.25}{EI}$$

$$\Sigma M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{35.1}{EI}$$

$$\Sigma M_{a'} = 0 \Rightarrow R_{d'} = \frac{37.8}{EI}$$

$$\theta_a = V_{a'} = -\frac{35.1}{EI} \qquad V_{a'} = \frac{-35.1}{EI}$$

$$\theta_b = V_{b'} = F_1 - R_{a'} = -\frac{18.9}{EI}$$

$$\delta_b = M_{b'} = -1.8\left(\frac{35.1}{EI}\right) + \left(\frac{16.2}{EI}\right)(0.6) = -\frac{53.46}{EI} \downarrow$$

$$\theta_c = V_{c'} = R_{d'} - F_4 = +\frac{17.55}{EI}$$

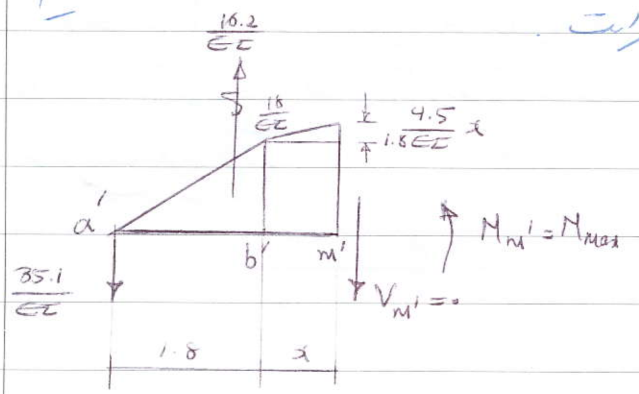
$$\delta_c = M_{c'} = -\frac{55.89}{EI} \downarrow$$

$$\theta_d = V_{d'} = +\frac{37.8}{EI}$$

$$\delta_d = M_{d'} = 0$$

محاسبه مقدار و محل تغییرمکان Max :

با توجه به نتایج بدست آمده و تغییر علامت شیب بین نقاط B و C می‌توان نتیجه گرفت که تغییرمکان حداکثر بین نقاط B و C رخ خواهد داد. در آن $\theta = 0$ است. نتیجه می‌گیریم جایی قرار دارد که در آن برش الاستیک برابر صفر است.



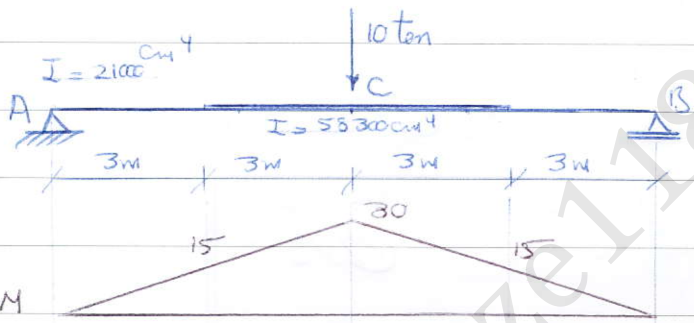

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{35.1}{EI} + \frac{16.2}{EI} + \frac{18x}{EI} + \frac{4.5}{1.8EI}x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\rightarrow x = 0.984\,m$$

$$\sum M_{m'} = 0 \Rightarrow EI\,M_{m'} + 35.1(1.8 + 0.984) - 16.2(0.6 + 0.984) - 18 \times 0.98 \times \frac{0.984}{2}$$

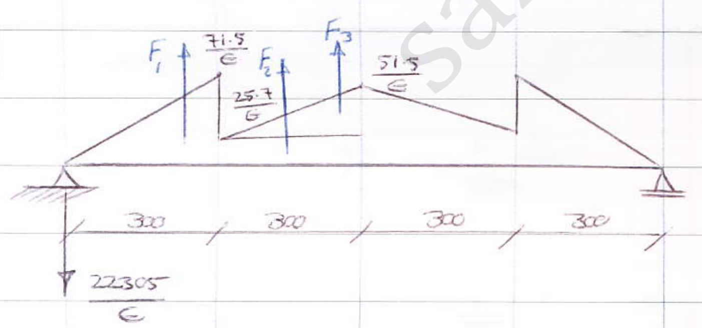
$$-\frac{4.5}{1.8} \times 0.984 \times \frac{0.984^2}{2 \times 3} = 0 \rightarrow \delta_{Max} = M_{m'} = -\frac{62.76}{EI} \downarrow$$

مثال : در شکل نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.




$E = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$

واحد طول = cm    نیرو = kg




$$F_1 = \frac{71.5 \times 300}{2E} = \frac{10725}{E}$$

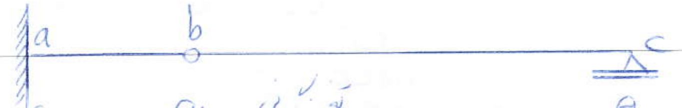
$$F_2 = \frac{7710}{E} \qquad F_3 = \frac{3870}{E}$$

$$R_A' = \frac{22305}{E}$$

$$\delta_C = M_C' = -R_A'(600) + 400F_1 + 150F_2 + 100F_3 = -\frac{7549500}{E} = -3.78\,cm \downarrow$$

## تعمیم روش بار الاستیک برای تیرها با شرایط تکیه‌گاهی مختلف (روش تیر مزدوج):

تاکنون روش بار الاستیک فقط برای تیرهای دو سر ساده مورد توجه قرار گرفت. می‌توان ثابت نمود که این روش برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف قابل تعمیم است، مشروط بر اینکه در تیر مزدوج تغییراتی در شرایط تکیه‌گاهی بوجود آید. به عنوان مثال تیری مطابق شکل زیر در نظر گرفته شده و شرایط تکیه‌گاهی را در تیر مزدوج اقناع می‌گردد. توجه شود در این حالت شرایط مرزی هندسی باید تبدیل به شرایط مرزی استاتیکی گردد.




شرایط مرزی هندسی تیر واقعی:

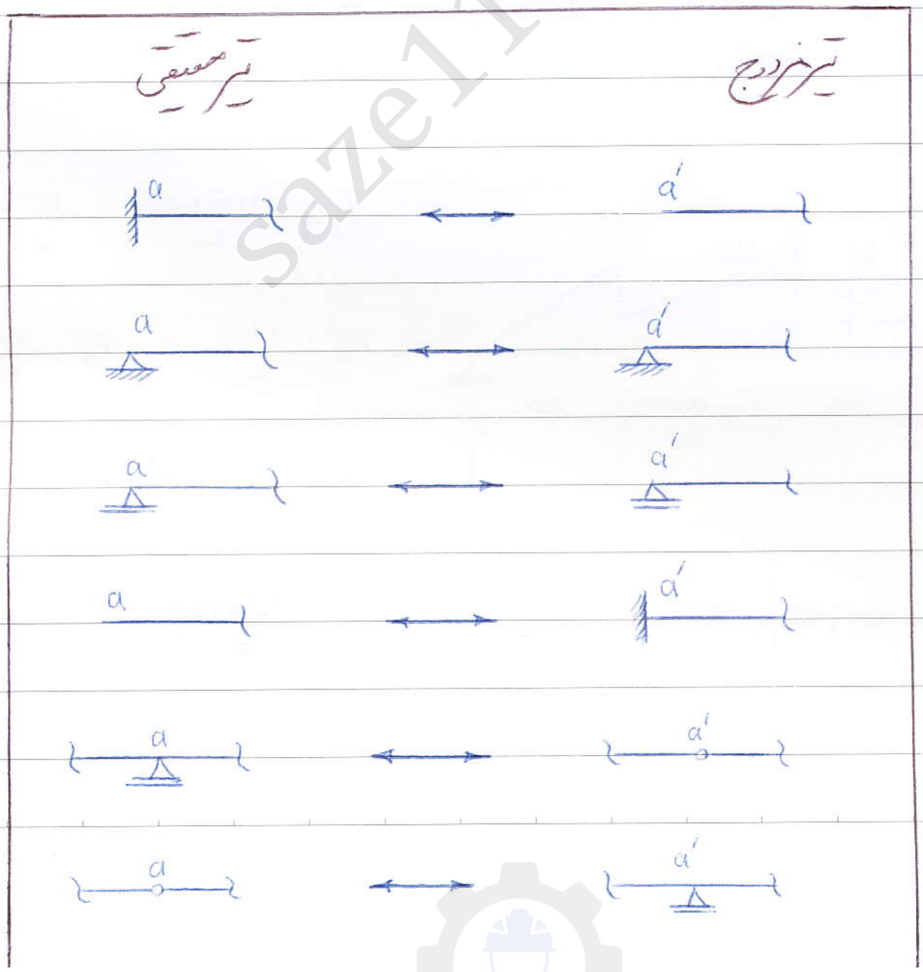
$\theta_a = 0$    $\theta_b =$ تغییر ناپیوسته    $\theta_c =$ وجود دارد

$\delta_a = 0$    $\delta_b =$ وجود دارد    $\delta_c = 0$

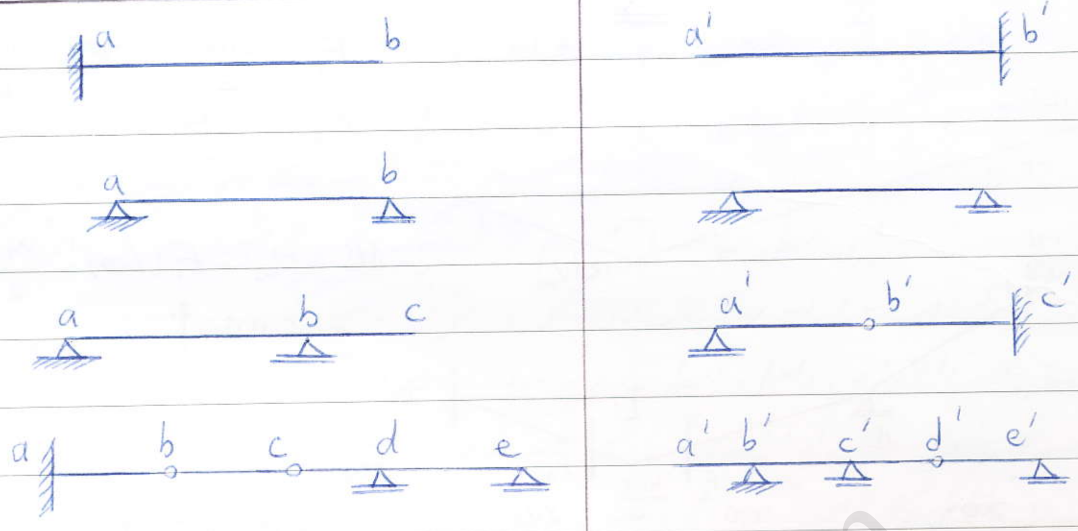
شرایط مرزی استاتیکی در تیر مزدوج:

$V_{a'} = 0$    $V_{b'} =$ تغییر ناپیوسته    $V_{c'} =$ وجود دارد

$M_{a'} = 0$    $M_{b'} =$ وجود دارد    $M_{c'} = 0$

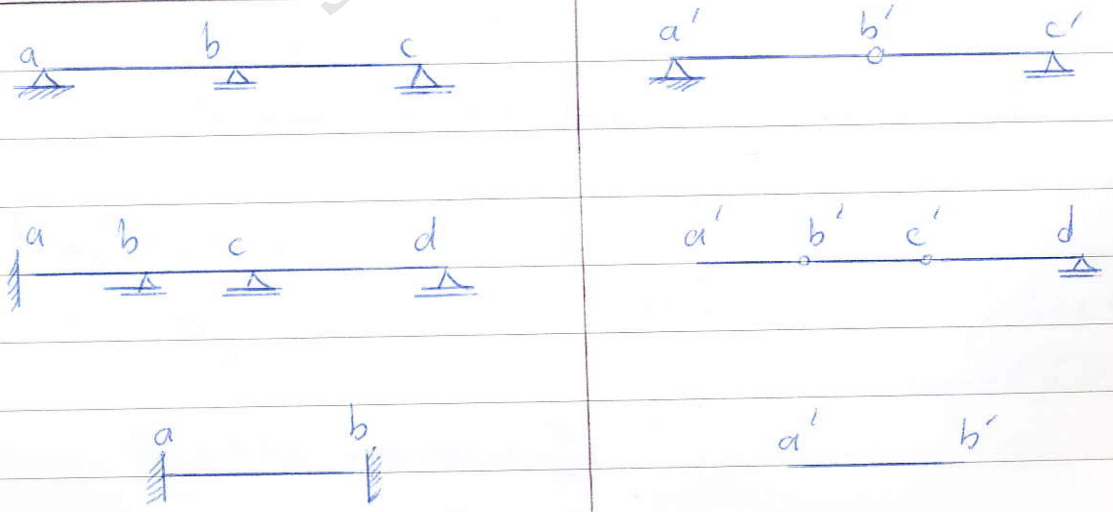



| تیر مزدوج | تیر حقیقی |
| --- | --- |



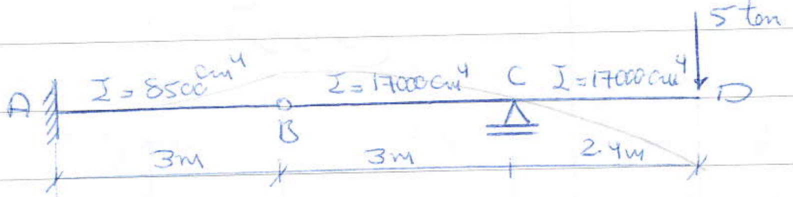

مثال‌های انتخاب شده تماماً تیرهای معین بودند که تیر مزدوج شان معین بدست می‌آید. حال چند مثال از تیرهای نامعین ارائه می‌کنیم. ملاحظه خواهد شد که تیر مزدوج سازه‌های نامعین ناپایدارند. شرط پایداری این سازه‌های ناپایدار روشی برای تحلیل تیرهای نامعین است که می‌توان در حل این تیرها از آن استفاده کرد.

| تیر مزدوج | تیر حقیقی |
| --- | --- |



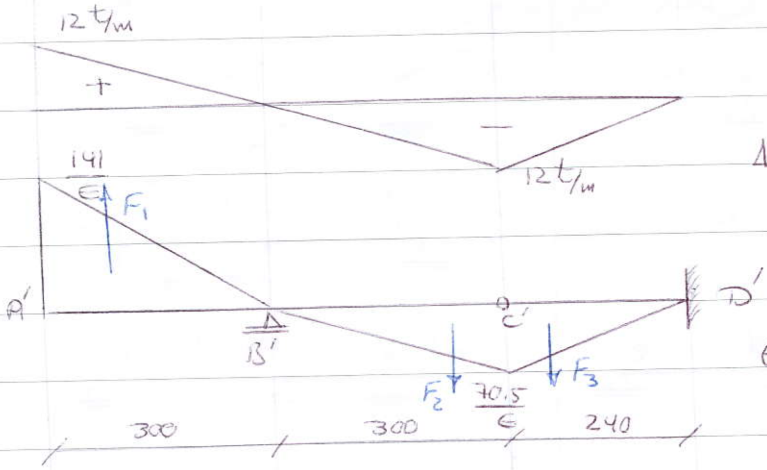
مثال ۸ $\Delta_B$ , $\Delta_D$ , $\theta_{B_{left}}$

را بدست آورید. $E = 2\times10^6$




$F_1 = \dfrac{21150}{E}$ $\qquad F_2 = \dfrac{10575}{E}$

$F_3 = \dfrac{8460}{E}$




$\Delta B = M_B' = F_1(200) = \dfrac{423\times10^4}{2\times10^6}$

$= 2.11\ \text{cm} \uparrow$

$\theta_{B_\ell} = V_{B_\ell}' = F_1 = \dfrac{21150}{2\times10^6}$

$= 0.0105\ \text{rad}$

$\Delta D = M_D'$

$\sum M_{c'} = 0$ (برای $A'B'C'$)

$F_1(200+300) - F_2(100) - R_B'(300) = 0 \longrightarrow R_B' = \dfrac{31725}{E}$

$\Delta D = M_D' = F_1(200+300+240) - R_B'(300+240) - F_2(100+240)$

$- F_3(160) \longrightarrow \Delta D = \dfrac{-642.96\times10^4}{2\times10^6} = -3.21\ \text{cm} \downarrow$

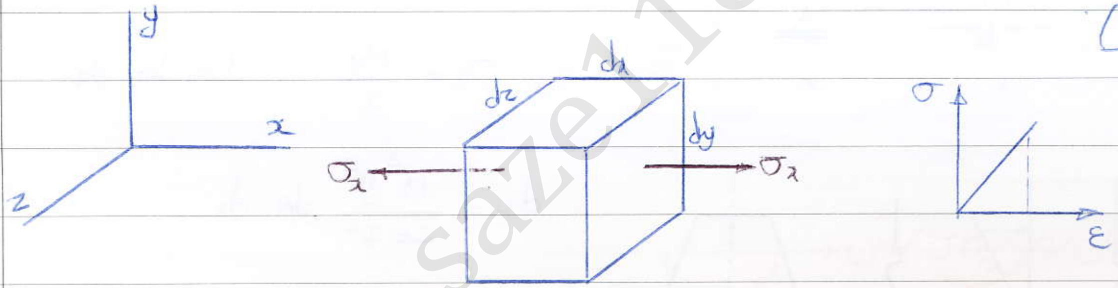
## روش‌های انرژی:

در مکانیک انرژی به صورت ظرفیت انجام کار تعریف می‌شود و کار نیز حاصل‌ضرب نیرو در تصویر تغییر مکان در امتداد نیرو است. در انجام مسائل تحت بارهای الاستیک، حاصل‌ضرب تنش در سطوح مربوطه را نیرو می‌نامند و تغییر شکل‌ها را با تشکیل تغییر شکل‌های نیروهای فوق را می‌نامند. حاصل‌ضرب این دو کمیت کار داخلی انجام شده در داخل جسم الاستیک تحت اثر نیروهای خارجی است. این کار داخلی به صورت انرژی داخلی در داخل جسم الاستیک ذخیره می‌شود که آن را انرژی کرنشی داخلی گویند. در اغلب موارد در زبان ساده آن را انرژی داخلی گویند.

در این فصل ابتدا انرژی داخلی الاستیک ارائه می‌شود، سپس با توجه به روابط انرژی روش‌های متعددی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها ارائه می‌شود. خواهید دید که این روش‌ها محقق تغییر شکل‌ها کمک می‌کنند و از آن‌ها می‌توان تغییر شکل‌های خمشی، پیچشی، نیروهای محوری و برشی را محاسبه کرد.

## انرژی کرنشی داخلی برای تنش تک محوری:

یک جزء کوچک از مصالح الاستیک که تحت تنش محوری قرار دارد در نظر گرفته و برای این المان انرژی را حاصل می‌کنیم.




انرژی = نیرو × تغییر مکان

$$dU = \tfrac{1}{2}(\sigma_x \, dz \, dy)(\varepsilon_x \, dx) \rightarrow dU = \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dx\,dy\,dz$$

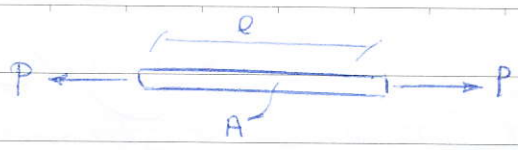
$$\rightarrow dU = \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dv \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dv} = \tfrac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$$

$dU/dv$: انرژی کرنشی ذخیره شده در واحد حجم مصالح و یا چگالی انرژی کرنشی یا ... در واحد حجم الاستیک:

قانون هوک $\rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

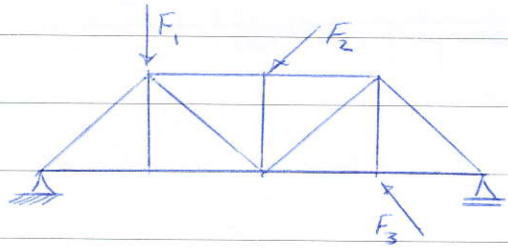
$$\frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \rightarrow U = \int_v \frac{\sigma_x^2}{2E} dv$$

۱) انرژی ذخیره شده برای اعضای محوری :




$$\left.\begin{array}{l} \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \\ \sigma_x = P/A \\ dV = A\,dx \end{array}\right\} \rightarrow dU = \frac{P^2}{2EA^2} A\,dx \rightarrow U = \int_0^l \frac{P^2}{2EA}\,dx$$

$$U = \frac{P^2 L}{2EA}$$



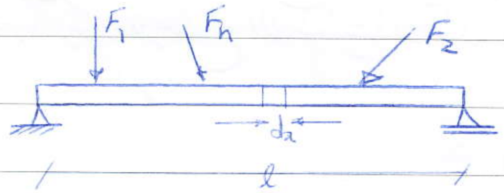

$$U = \sum \frac{P_i^2 L_i}{2EA_i}$$

$P_i$ = نیروی داخلی عضو i

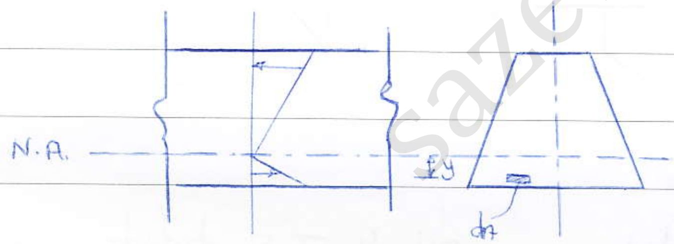
$L_i$ : طول

$A_i$ = سطح مقطع

۲) انرژی ذخیره شده برای اعضای خمشی (خمش خالص) :




$$\sigma_x = \frac{My}{I} \qquad dV = dA\,.\,dx$$




$$dU = \frac{M^2 y^2}{2EI^2}\,dA\,.\,dx$$

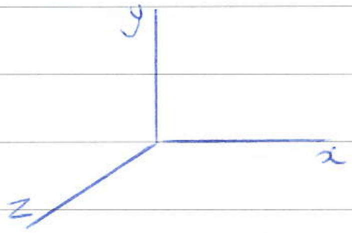
$$U = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2}\,dA\,dx$$

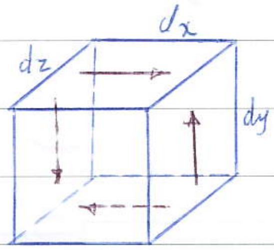
$$\rightarrow U = \int \frac{M^2}{2EI^2}\,dx \int y^2 dA \Rightarrow U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

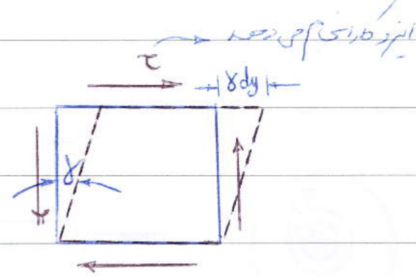
M : لنگر خمشی داخلی

انرژی داخلی برای تنش های برشی :

محدوده ای از عضو کوچکی از یک جسم الاستیک تحت تاثیر تنش های برشی را در نظر گرفته برای آن انرژی را محاسبه می کنیم



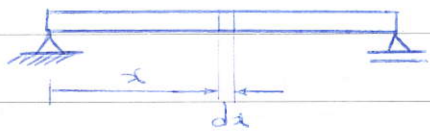

$$dU = \frac{1}{2}\tau\, dz\, dx \times \gamma dy = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV$$

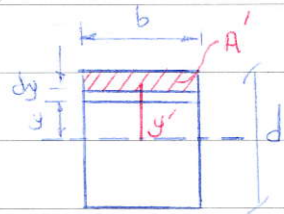
$$\rightarrow \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

$\tau = G\gamma$ G : ضریب الاستیسیته برشی برای اجسام الاستیک :

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\frac{\tau}{G} \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

۱) انرژی کرنشی داخلی برای نیروهای برشی :




$\frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2}{2G}$ , $\tau = \frac{V_x Q}{Ib}$ , $dV = b\, dy\, dx$ $V_x$ : نیروی برشی داخلی

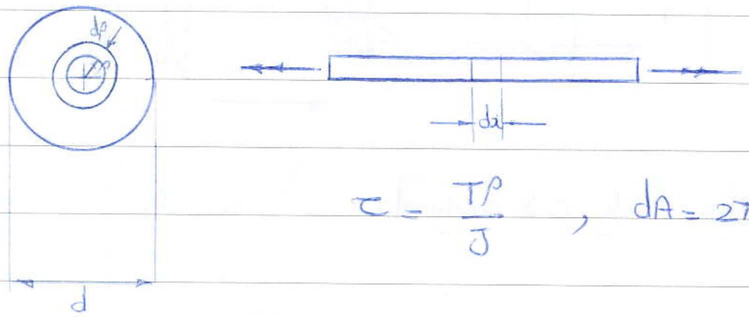
$$Q = A'y' = b(d/2 - y)\left[y + \left(\frac{d/2 - y}{2}\right)\right] = \frac{b}{8}(d^2 - 4y^2)$$

$$\Rightarrow dU = \frac{V_x^2 (d^2 - 4y^2)^2}{128 I^2 G} dV = \frac{V_x^2 (d^2 - 4y^2)^2}{128 I^2 G} b\, dx\, dy$$

$$U = 1.2\int_0^L \frac{V_x^2\, dx}{2GA} \longrightarrow U = k\int_0^L \frac{V_x^2\, dx}{2GA}$$

مقطع مستطیل : $K = 1.2$ $\qquad$ ○ : $\frac{10}{6} = 1.667$ $\qquad$ I : $K = 1$

۱۲) انرژی کرنشی داخلی برای لنگر پیچشی :




$$\frac{dU}{dv} = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad , \quad dA = 2\pi\rho\, d\rho \rightarrow dv = 2\pi\rho\, d\rho\, dx$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2}\frac{T^2\rho^2}{GJ^2}\, 2\pi\rho\, d\rho\, dx \longrightarrow U = \int \frac{1}{2}\frac{T^2\rho^2}{GJ^2}\, 2\pi\rho\, d\rho\, dx$$

$$\longrightarrow U = \int \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ^2}\, dx \int_0^c 2\pi\rho^3\, d\rho = \int \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ^2}\, dx\, 2\pi\frac{c^4}{4} \qquad J = \frac{\pi c^4}{2}$$

$$U = \int \frac{T^2}{2GJ}\, dx$$

مقطع مستطیل : $J = cb^3h$ $\quad$ h ضلع بزرگ $\quad$ b ضلع کوچک $\quad$ $c = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right]$

انرژی کرنشی برای تنش های چند محوره :

$$U_0 = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}$$

با استفاده از قانون عمومی هوک :

$$U_0=\frac{dU}{dV}=\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2\right)-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x\right)$$

$$+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

تنش صفحه‌ای:

$$\sigma_z=0 \qquad \tau_{yz}=\tau_{zx}=0$$

$$U_0=\frac{dU}{dV}=\frac{\sigma_x^2}{2E}+\frac{\sigma_y^2}{2E}-\frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y+\frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

وقتی عضوی تحت ترکیب نیروهای محوری، خمشی، برشی و پیچشی باشد از آنجا که انرژی تابع اسکالر است، می‌توان انرژی ناشی از نیروهای داخلی مختلف را به صورت جدا حساب و آن‌ها را با هم جمع کرد.

$$U=\frac{P^2L}{2EA}+\int\frac{M^2}{2EI}dx+k\int\frac{V_x^2}{2GA}dx+\int\frac{T^2}{2GJ}dx$$

محاسبه تغییرمکان‌ها با استفاده از روش‌های انرژی:

با استفاده از روابط حاصل شده برای انرژی ذخیره شده در اعضای الاستیک روش‌های مختلفی ارائه می‌گردد.

۱) روش کار حقیقی: از لحاظ مفهومی این روش بسیار قابل فهم و واضح و پایه‌ای برای روش‌های دیگر است اما از لحاظ کاربردی بسیار ضعیف و محدود است. مبنای این روش بر اساس اصل بقای انرژی است.

انرژی داخلی = کار خارجی

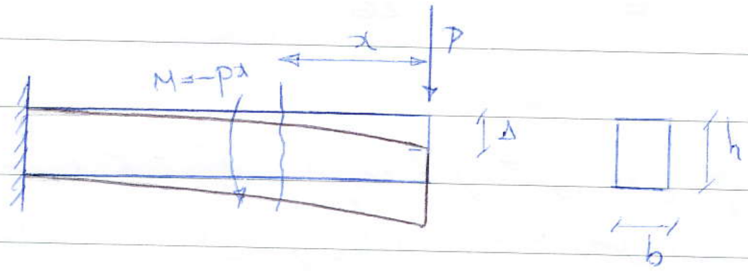
| | |
|---|---|
| $U=\int_0^l \frac{P^2dx}{2EA}$ عضو محوری | $U=\int_0^l \frac{M^2dx}{2EI}$ عضو خمشی |
| $U=k\int_0^l \frac{V_x^2dx}{\ldots}$ عضو برشی | $U=\int_0^l \frac{T^2dx}{2GJ}$ عضو پیچشی |

مثال ۱: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر تکیه گیردار مقابل چیست؟


$$W_e = \frac{1}{2} P\Delta$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 L}{EA}$$

$$\rightarrow W_e = U \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA}$$




مثال ۲: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر مقابل تحت بار P را بدست آورید.

$W_e = \frac{1}{2} P\Delta$ $\qquad$ $U = U_b + U_s$ $\qquad$ انرژی خمشی + انرژی برشی

$$U_b = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U_s = 1.2 \int_0^l \frac{V_x^2}{2GA} dx = 1.2 \int_0^l \frac{P^2}{2GA} dx = \frac{1.2 P^2 l}{2GA}$$

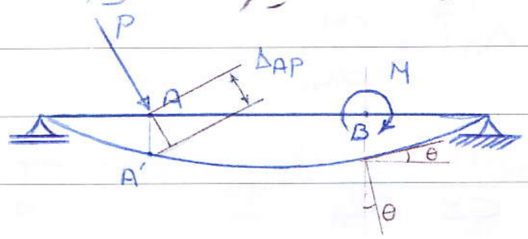
$$\frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{1.2 P^2 L^2}{2GA} \rightarrow \Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{خمشی}} + \underbrace{\frac{1.2 PL^2}{GA}}_{\text{برشی}}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G} \frac{h^2}{L^2}\right) = \Delta_b\left(1 + 0.75 \frac{h^2}{L^2}\right)$$

$h/L = 1/10$ تا $1/30$ $\qquad$ L طول دهانه $\qquad$ h ارتفاع مقطع

## کاستیلیانو (Castigliano)

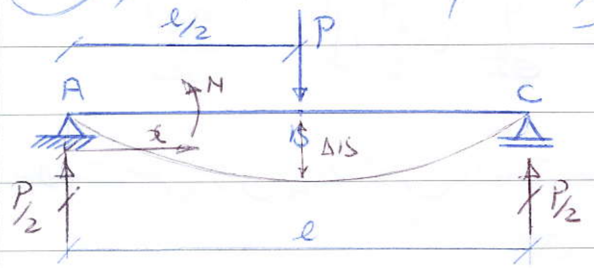
ثابت می‌شود مشتق جزئی تابع انرژی در یک جسم الاستیک که درجه حرارت آن ثابت بوده و تکیه‌گاه‌های آن فاقد نشست است، مساوی است با تغییر مکان الاستیک نقطه اثر نیرو در امتداد نیرو.




$$\Delta_{AP} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M}$$

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه B فقط به علت انرژی خمشی. (EI ثابت)




$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

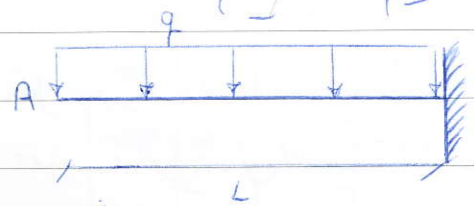
$$\Delta B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\Rightarrow \Delta B = 2\int_0^{l/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \qquad M = \frac{P}{2}x \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\Delta B = 2\int_0^{l/2} \frac{Px}{2EI} \times \frac{x}{2} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$\rightarrow \Delta B = \frac{PL^3}{48EI}$$

در روش کار حقیقی همواره باید یک نیرو در محل محاسبه در بدست آوردن انرژی می‌داشتیم اما در این روش فرقی ندارد.

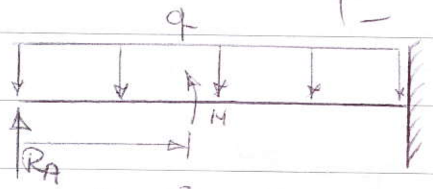



(EI ثابت)

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست $\Delta A$ در امتداد قائم و $\theta_A$ (فقط تغییر شکل ناشی از خمش)

در نقطه مورد نظر باید نیرویی در راستای مورد نظر موجود داشته باشد تا بتوان از تابع انرژی نسبت به آن مشتق جزئی گرفت. بنابراین نیروی فرضی $R_A$ در امتداد قائم (مورد نظر) به انتهای تیر اثر می‌دهیم. قضیه کاستیلیانو را اعمال نموده پس از مشتق‌گیری نیروی

فرض اصولی نداریم. حال اگر در نقطه مورد نظر نیروی عمودی موجود نباشد آن عدد را به طور موقت به بار اکثر تبدیل می کنیم پس از مشتق گیری مجدداً بار اکثر را برابر عدد قرار می دهیم.



$$\Delta_A \uparrow = \frac{\partial U}{\partial R_A}$$

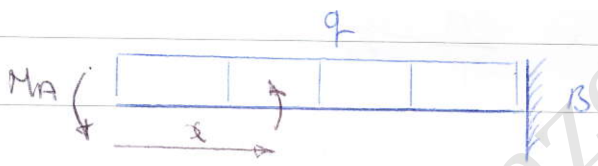
$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \qquad \Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx$$

$$\rightarrow M = R_A x - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Rightarrow \Delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(R_A x - \frac{qx^2}{2}\right) x\, dx = \frac{-q}{EI}\left(\frac{x^4}{8}\right)\Big]_0^l = -\frac{ql^4}{8EI}$$

علامت منفی برای $\Delta_A$ یعنی این است که تغییر مکان در خلاف نیروی بارگذاری $R_A$ است.

تعیین $\theta_A$:

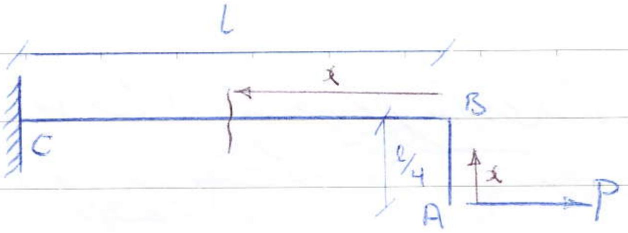


$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} dx \qquad M = -M_A - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

$$\theta = \int_0^l \frac{1}{EI}\left(M_A - \frac{qx^2}{2}\right)(-1)\, dx = \frac{q}{EI}\int_0^l x^2 dx = \frac{q}{EI}\,\frac{l^3}{6} = \frac{ql^3}{6EI}$$

مثال: در قاب نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را محاسبه نمایید. (تغییر شکل های ناشی از برش و محوری صرف نظر) هدف از این مثال این است که نشان دهیم لازم است انتگرال گیری تابع انرژی برای تمام اعضا باید حساب شود.




$$U = \int_A^B \frac{M^2}{2EI}dx + \int_B^C \frac{M^2}{2EI}dx$$

$$\text{افقی } \vec{\Delta}_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_A^B \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx + \int_B^C \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx$$

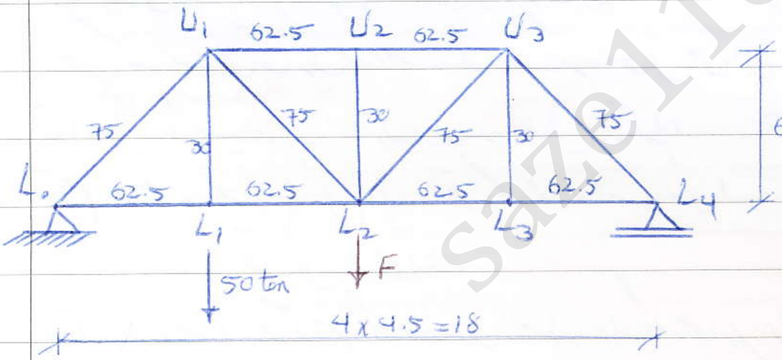
$M = Px \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial P} = x$    ناحیه AB

$M = \dfrac{PL}{4} \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial P} = L/4$    ناحیه BC

$$\Delta A = \int_0^{L/4} \frac{Px}{EI}x\,dx + \int_0^L \frac{PL}{4EI}\frac{L}{4}dx = \frac{13PL^3}{192EI}$$

مثال: مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه $L_2$ در خرپای نشان داده شده در شکل. اعداد نوشته شده روی اعضا سطح مقطع اعضا بر حسب $cm^2$ می‌باشد.

با توجه به اینکه در $L_2$ نیرویی با راستای عمودی وجود ندارد لازم است نیرویی مانند F فرضی قرار داده شود.




$$U = \sum \frac{P^2L}{2EA}$$

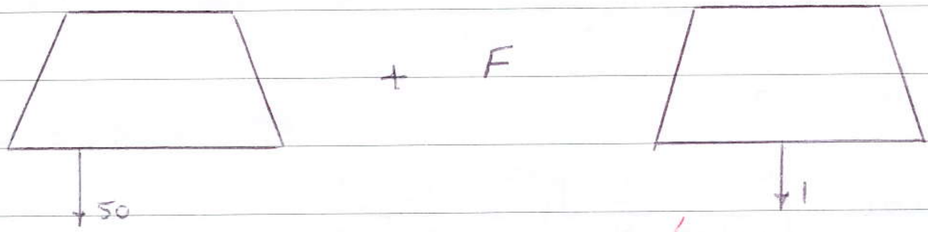
$$\Delta L_2 = \sum \frac{PL}{EA}\frac{\partial P}{\partial F} = \frac{1}{E}\sum \frac{L}{A}P\frac{\partial P}{\partial F}$$

نیرو = kg    طول = cm

| عضو | L | A | L/A | نیروی داخلی اعضا kg | | $\partial P/\partial F$ | $P\frac{L}{A}\frac{\partial P}{\partial F}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| واحد | cm | $cm^2$ | 1/cm | بارخارجی | F | kg/kg | kg/cm |
| $L_0L_1$ | 450 | 62.5 | 7.2 | 28125 | 0.375F | 0.375 | 75937.5 |
| $L_1L_2$ | 450 | 62.5 | 7.2 | 28125 | 0.375F | 0.375 | 75937.5 |
| | | | | | | | |
| $L_4U_3$ | 750 | 750 | 10 | -15625 | -0.625F | -0.625 | 97656.25 |

برای حل مسئله لازم است خرپا برای بارگذاری نشان داده شده تحلیل شود. چون نیروی بار افقی وجود دارد تحلیل خرپا وقت گیر خواهد بود. توصیه می‌شود در این حالت خرپا یکبار تنها برای بارهای خارجی عمودی و دیگر برای بار یا افقی مساوی واحد تحلیل شده و نتایج دو تحلیل با هم ترکیب شوند. این کار ساده‌تر خواهد شد.

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{795625}{2\times10^{6}} = 0.4\,cm \downarrow$$




## روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها:

کار مجازی در مکانیک سازه‌ها به دو حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

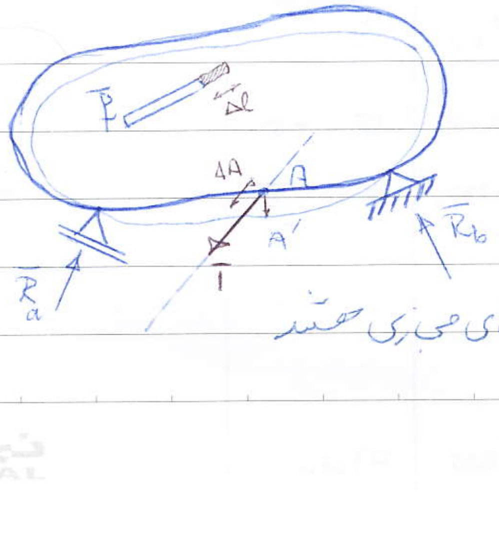
۱) در صورتیکه نیروها واقعی و تغییر مکان‌ها مجازی باشند. از این شیوه در روش استاتیک برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی به کار می‌رود.

۲) حالتی که تغییر شکل‌ها حقیقی و نیرو مجازی است. از این شیوه در محاسبه تغییر شکل‌ها استفاده می‌شود یعنی یک نیروی مجازی واحد به سازه اعمال می‌گردد.

گام اول: یک نیروی مجازی بر سازه اعمال می‌گردد.

گام دوم: تغییر شکل‌های واقعی که می‌توانند ناشی از بارهای خارجی یا اثر حرارت و یا نشست تکیه‌گاهی باشد بر سازه اعمال می‌گردد.

گام سوم: حال می‌نویسیم کار مجازی داخلی برابر کار مجازی خارجی. این رابطه تعادل تغییر مکان نقطه مورد نظر را در امتداد بار واحد مجازی بدست می‌دهد.




$\bar{1}$ : بار واحد مجازی خارجی

$\bar{F}$ : نیروی داخلی مجازی

$\bar{R}_a$ , $\bar{R}_b$ : واکنش‌های مجازی

* در روابط مورد استفاده بالا تمام علائمی که نشانه کمیت‌های مجازی هستند یک خط تیره روی آن قرار دارد.

کار مجازی خارجی = کار مجازی داخلی

$$W_R + \underbrace{\bar{T} \times \Delta_A}_{\text{نیروی مجازی}} = \overbrace{\sum(\bar{f} \cdot \Delta L)}^{\text{تغییر شکل حقیقی}}$$

$W_R$ : کار مجازی واکنش های تکیه گاهی به علت نشست تکیه گاهی

۱) رابطه کار مجازی در خرپا :

الف) به علت بار خارجی :

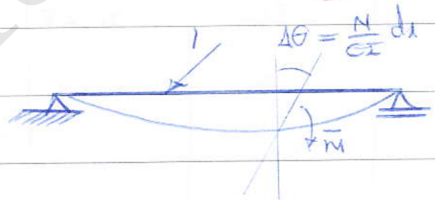
$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum(\bar{f} \cdot \frac{PL}{EA})$$

ب) به علت تغییرات دما :

$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum \bar{f} (\alpha \Delta T L)$$

۲) رابطه کار مجازی در تیرها به علت اثرات خمشی :

$$W_R + \bar{T} \frac{\Delta A}{\Delta \theta} = \int \bar{m} \cdot \frac{M}{EI} dx$$



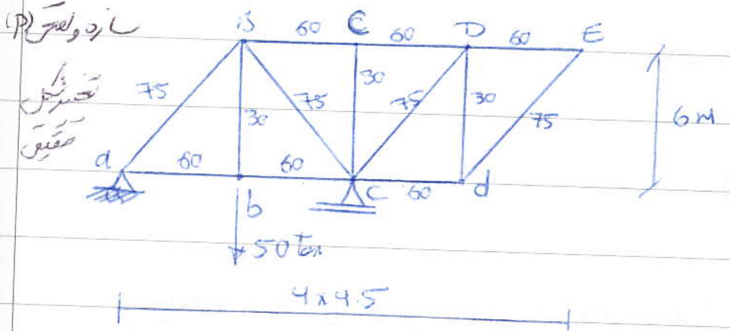

$m . \theta \sim f . l \sim$ انرژی

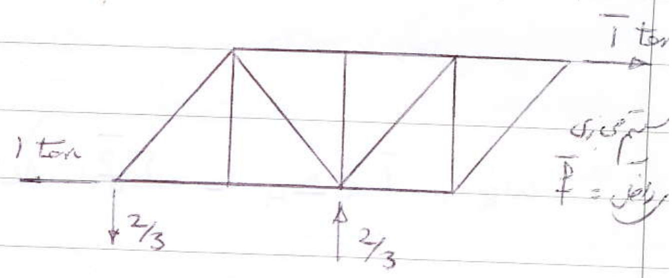
## کاربرد روش کار مجازی :

۱) خرپاها :

مثال : در خرپای شکل داده شده تغییر مکان نقطه E را بدست آورید. (اعداد داده شده سطح مقطع برحسب $cm^2$ می باشد)

$$E = 2\times10^6 \ kg/cm^2 = 2\times10^3 \ ton/cm^2$$




$$\cancel{W_R}^{\,0} + \bar{1} \times \vec{\Delta E} = \Sigma \bar{f} \cdot \frac{PL}{EA}$$

| $\bar{f}\,\frac{PL}{A}$ $ton^2/cm$ | P ton | $\bar{f}$ ton | $\frac{L}{A}$ 1/cm | A $cm^2$ | L cm | عضو واحد |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 70.4 | +18.75 | +0.5 | 7.5 | 60 | 450 | ab |
| 70.4 | +18.75 | +0.5 | 7.5 | 60 | 450 | bC |
| -260 | -31.25 | +0.83 | 10 | 75 | 750 | aB |
| +260 | -31.25 | +0.83 | 10 | 75 | 750 | Bc |
| $\Sigma =$ 140.8 | | | | | | |

عناصری که یکی از نیروهای P و $\bar{f}$ برای آن ها صفر شده است در جدول نوشته نشده است.

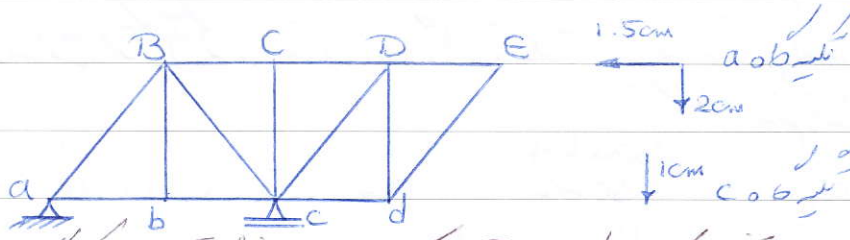
$$\bar{1}\,\Delta = \frac{1}{2000} \times 140.8 = 0.0704 \Rightarrow \Delta = 0.0704\,cm \rightarrow$$

با توجه به اینکه علامت Δ مثبت بدست آمده است پس این است که در جهت تغییر مکان هم جهت با بار واحد می باشد.

$$W_R + \bar{1} \times \Delta = \sum \frac{\bar{F}_i \cdot P_i L_i}{E \cdot A_i}$$

پس در خرپاها:

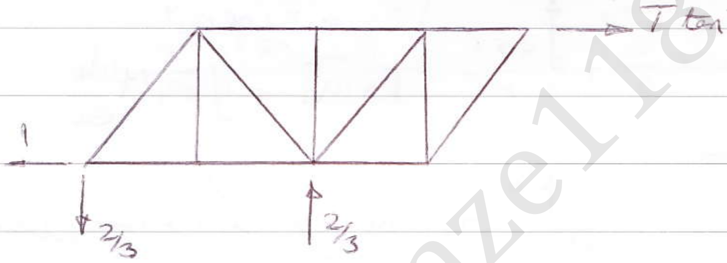
مثال: در خرپای مثال قبل تغییر مکان افقی گره E را در اثر نشست های تکیه گاهی زیر محاسبه نمایید




برای حل در نقطه E بار واحد مجازی را در امتداد افقی اثر می دهیم تا سیستم مجازی بدست آید. اکنون تغییر مکان های واقعی را که همان نشست های تکیه گاهی باشند بر سیستم مجازی اعمال می نماییم. کارهای خارجی موجود ناشی از بار واحد مجازی 1 ton و کار واکنش های تکیه گاهی مجازی است. کار داخلی موجود نداریم چون P برای اعضای داخل صفر است و با فرض اینکه در اثر نشست های تکیه گاهی هیچگونه تغییر طولی در اعضا ایجاد نمی شود.

$$\overline{W}_R + 1 \times \vec{\Delta}_E = \sum \bar{F}\,\frac{PL}{EA}^{\,0} \rightarrow \left(\tfrac{2}{3}\right)(2) + (1)(1.5) - \tfrac{2}{3}\times 1 + 1\times \Delta E = 0$$

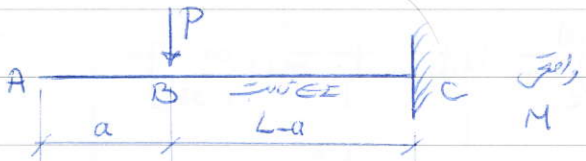
$$\rightarrow 1 \times \Delta E = -2.17 \quad \Rightarrow \quad \Delta_E = 2.17\,\text{cm}$$




1 ton در نقطه مورد نظر راستای مورد نظر اعمال گردد.

## ۲) تیرها:

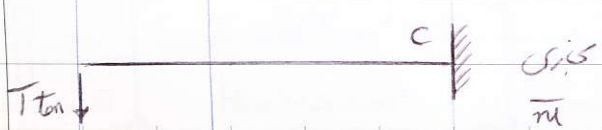
در تیر نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه a را محاسبه نمایید. (انعطاف برشی منظور گردد)




$$1 \times \Delta_A^{\downarrow} = \int \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

$$\bar{F}\cdot\delta$$

$$\bar{m}\cdot d\theta$$




حاصل به عنوان کارهای مجازی می دهند

$$1 \times \Delta_A \downarrow = \int_A^B + \int_B^C$$

در محاسبات انتگرال گیری انتخاب مبدأ مختصات برای هر قسمت به طور مستقل امکان پذیر می باشد

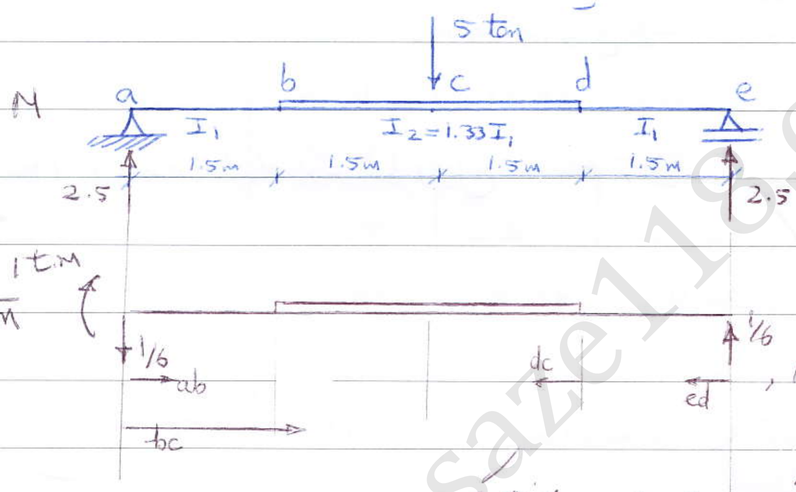
ناحیه AB ، $0<x<a$ ، $M=0$ ، $\bar{m}=x(-1)$

ناحیه BC ، $0<x<L-a$ ، $\bar{m}=-1(a+x)$ ، $M=-px$

$$1 \times \Delta_A \downarrow = 0 + \frac{1}{EI}\int_0^{L-a}[-(a+x)][-px]\,dx$$

$$\rightarrow \Delta A \downarrow = \frac{P}{6EI}(L-a)^2(2L+a)$$

مثال: در تیر نشان داده شده دوران نقطه A را محاسبه کنید.




$E = 2\times 10^3 \ t/cm^2$

$I_1 = 6200 \ cm^4$

$I_2 = 8260 \ cm^4$

$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \int \bar{m} M \frac{dx}{EI}$$

در طول ناحیه انتگرال گیری توابع $M$ ، $\bar{m}$ ، $I$ باید پیوسته و یکنواخت باشند.

بنابراین در این مثال لازم است انتگرال گیری در چهار محدوده انجام گردد.

$$1 \times \overrightarrow{\alpha_c} = \int_a^b + \int_b^c + \int_e^d + \int_d^c$$

$$= \frac{1}{EI_1}\left[\int_a^b \bar{m} M dx + \int_b^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33} + \int_e^d \bar{m} M dx + \int_d^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33}\right]$$

| $x$ | $I$ | $\bar{m}$ | $M$ | ناحیه |
|---|---|---|---|---|
| $0<x<1.5$ | $I_1$ | $1-x/6$ | $2.5x$ | $b \bar{\smile} a$ |
| $1.5<x<3$ | $1.33I_1$ | $1-x/6$ | $2.5x$ | $c \bar{\smile} b$ |
| $0<x<1.5$ | $I_1$ | $x/6$ | $2.5x$ | $d \bar{\smile} e$ |
| $0<x<1.5$ | $1.33I_1$ | $1/6(1.5+x)$ | $2.5(1.5+x)$ | $c \bar{\smile} d$ |

$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \frac{1}{EI_1}\left[\int_0^{1.5}(1-x/6)(2.5x)dx + \int_{1.5}^{3}(1-x/6)(2.5x)\frac{dx}{1.33}\right.$$

$$\left. + \int_0^{1.5}(x/6)(2.5)x\,dx + \int_0^{1.5}(1/4 + x/6)(3.75+2.5x)\frac{dx}{1.33}\right]$$

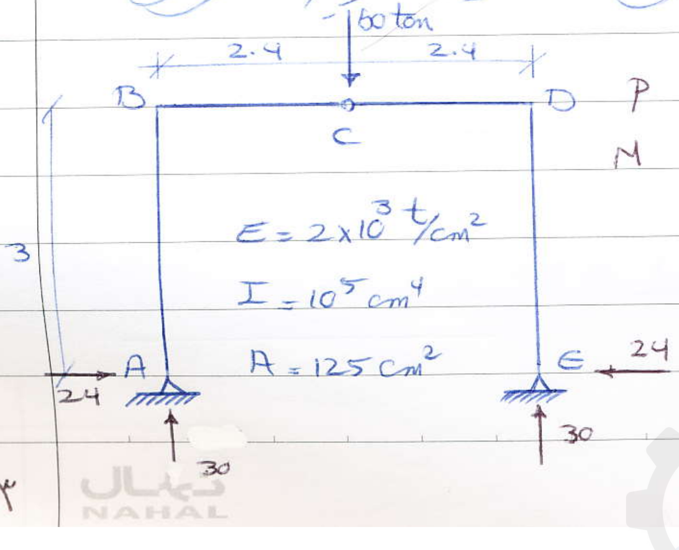
$$= \frac{1}{EI_1}\left[\left(\frac{5.5x^2}{2} - \frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5} + \frac{1}{1.33}\left(\frac{2.5x^2}{2} - \frac{x^3}{7.2}\right)_{1.5}^{3}\right.$$

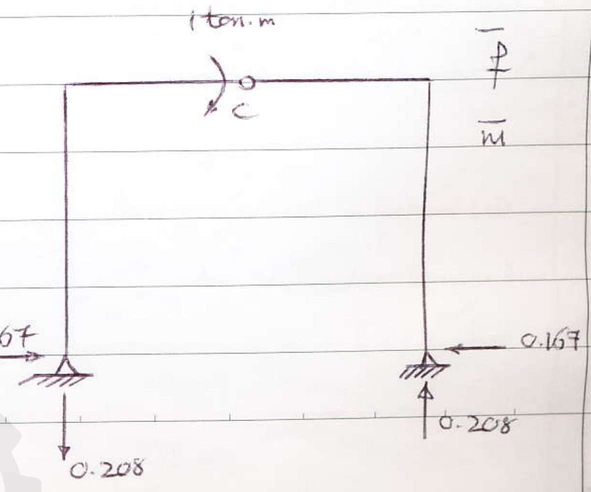
$$\left. + \left(\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5} + \frac{1}{1.33}\left(\frac{3.75}{4}x + \frac{5}{8}x^2 + \frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}\right] = \frac{9.157}{EI_1}$$

$$\rightarrow \alpha_a = 0.0074 \text{ Rad}$$

۳) قاب ها

(در قاب شکل داده شده دوران نسبی لولای c را بدست آورید (اثر تغییر شکل های محوری و برشی صرف نظر گردد)



$$1 \times \vec{\alpha_a} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx + \Sigma \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

$$1 \times \vec{\alpha_a} = \int_A^B \bar{m} M \frac{dx}{EI} + \int_B^C + \int_E^D + \int_D^C + \Sigma \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

مقادیر $\bar{m}$ و $M$ و $\bar{f}$ و $P$ در نواحی مختلف تعریف می‌شوند.

$L = 3$ , $0 < x < 3$ $\begin{cases} \bar{f} = 0.208 \\ P = -30 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.167x$, $M = -24x$ از B تا A

$L = 2.4m$ , $0 < x < 2.4$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.167 \\ P = -24 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.5 - 2.08x$, $M = -72 + 30x$ از C تا B

$L = 3$ $0 < x < 3$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.208 \\ P = -30 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.167x$, $M = -24x$ از D تا E

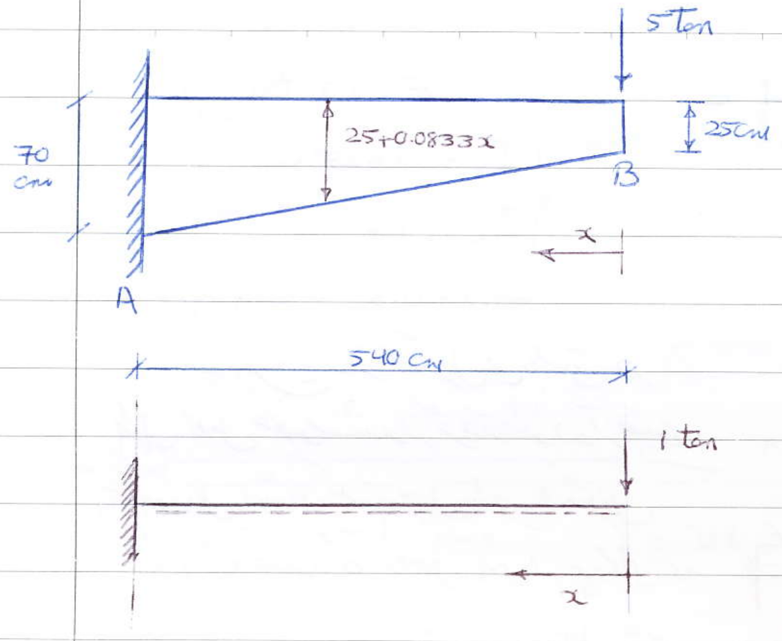
$L = 2.4$ $0 < x < 2.4$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.167 \\ P = -24 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.5 + 0.208x$, $M = -72 + 30x$ از C تا D

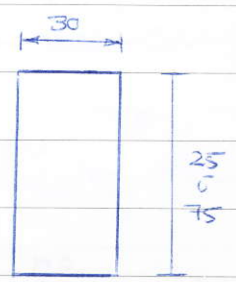
$$1 \times \vec{\alpha_a} = \frac{1}{EI}\left[ 2\int_0^3 (-0.176x)(-24x)\,dx + \int_0^{2.4} (-0.5 - 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \right.$$

$$\left. + \int_0^{2.4} (-0.5 + 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \right] + \frac{2}{EA}(0.167)(-24)(2.4)$$

$$= \frac{158.5}{EI} + \frac{19.2}{EA} = 0.00793 + 0.0000768 = 0.008 \text{ Rad.}$$

## ٤) تیرها با مقاطع اینرسی متغیر




$E = 20 \times 10^5 \ \frac{kg}{cm^2}$

$\boxed{\Delta B = ?}$

$$1 \times \Delta_B \downarrow = \int_0^L \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

$\bar{m} = -x \ ton.cm \ , \ M = -5x \ ton.cm \ , \ I = 30(25 + 0.0833x)^3 \times \frac{1}{12}$

$E = 20 \times 10^2 \ ton/cm^2$

$$\Delta_B = \frac{1}{E} \int \frac{(-5)(-5x)\,dx}{\frac{30(25+0.0833x)^3}{12}} = \frac{2 \times 10^6}{833^3 E} \int_0^{540} \frac{x^2\,dx}{(300+x)^3}$$

$y = a + x \longrightarrow x = y - a \Rightarrow dx = dy$

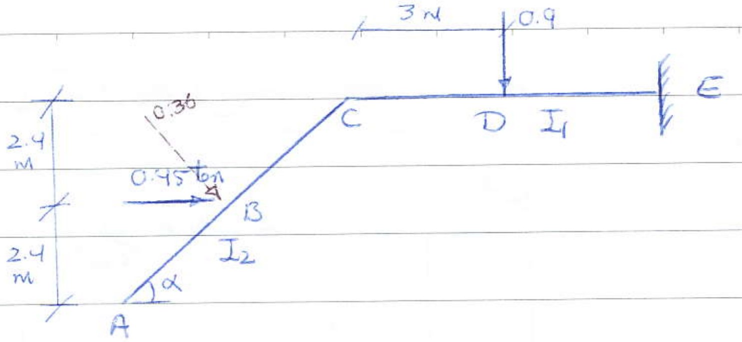
$$\rightarrow \Delta_B = \frac{2 \times 10^6}{833^3 E} \int_{300}^{840} \frac{(y-300)^2}{y^3} dy = A\left[\int_{300}^{840} \frac{dy}{y} - 600\int_{300}^{840} \frac{dy}{y^2} + 90000\int_{300}^{840} \frac{dy}{y^3}\right]$$

$$= A\left[\ln y + \frac{600}{y} - \frac{90000}{2y^2}\right]_{300}^{840} = 3.11 \ cm$$

در صورتیکه امکان انتگرال گیری به هیچ وجود نداشته باشد، استفاده از انتگرال گیری های عددی توصیه می شود. (در کتاب روش ارائه شده)

## ۵) سازه با اعضای شیبدار

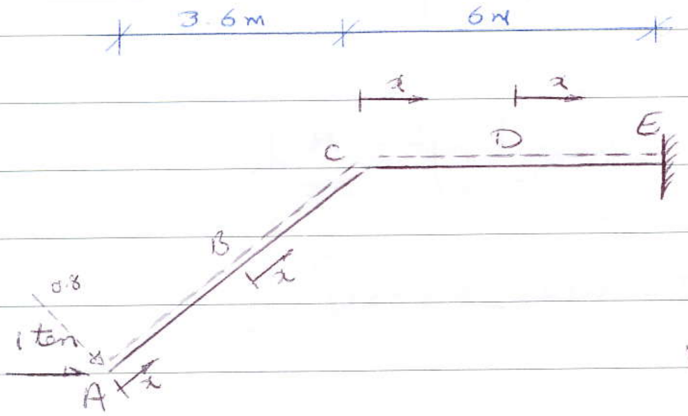
در سازه نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را محاسبه کنید. (فقط اثر تغییر شکل های خمشی منظور گردد)




$E = 2100\ ton/cm^2$

$$\begin{cases} I_1 = 15625\ cm^4 \\ I_2 = 7810\ cm^4 \end{cases}$$

$\sin\alpha = 0.8 \qquad \cos\alpha = 0.6$




در اعضای شیبدار انتگرال می بایستی در طول کامل عضو شیبدار گرفته شود و از تصویر عضو مایل استفاده نکنیم چون این انتگرال نشان دهنده کار داخلی ناشی از نیروهای داخلی است و این کار باید در طول کامل عضو محاسبه گردد.

$$1 \times \delta_A = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

B تا A : $M = 0 \qquad \bar{m} = 0.8x\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

C تا B : $M = 3.6x \qquad \bar{m} = 2.4 + 0.8x\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

D تا C : $M = 1.08\ ton.m \qquad \bar{m} = 4.8\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

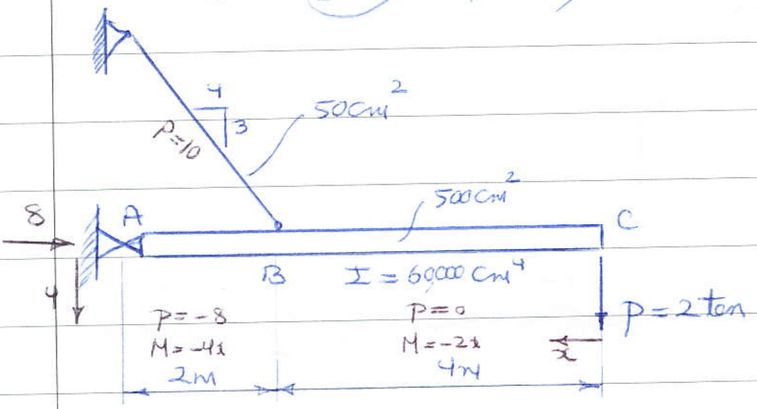
E تا D : $M = 1.08 + 0.9x \qquad \bar{m} = 4.8\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

$$E\delta_A = \int_0^3 \frac{(2.4+0.8x)(0.36x)}{7810 \times 10^{-8}} dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.8)}{15625 \times 10^{-8}} dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.08+0.9x)}{15625 \times 10^{-8}} dx$$

$$= \frac{64.156}{15625 \times 10^{-8}} \quad \Longrightarrow \delta_A = 1.96\ cm$$

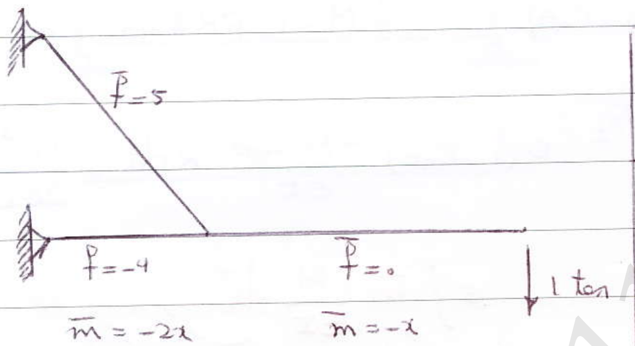
## ۶) سازه‌های ترکیبی:

سازه‌هایی را گویند که در آن‌ها هم اعضای خمشی و هم اعضای محوری وجود دارد. در این نوع سازه‌ها حتی اگر در صورت مسئله ذکر نشده باشد، انرژی محوری همراه با انرژی خمشی باید منظور گردد.




در سازه شکل داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را محاسبه نمایید.

$$1\times\Delta_C=\sum \bar{f}\,\frac{PL}{EA}+\int_0^L \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$




| عضو | $\bar f$ (ton) | $P$ (ton) | $L$ (cm) | $A$ ($cm^2$) | $\bar f \frac{PL}{A}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| DB | +5 | +10 | 250 | 50 | 250 |
| AB | -4 | -8 | 200 | 500 | 12.8 |
| | | | | $\Sigma$ | 262.8 $\frac{ton^2}{cm}$ |

$$\sum \bar f\,\frac{PL}{EA}=\frac{262.08}{700}=0.375\ \text{ton.cm}$$

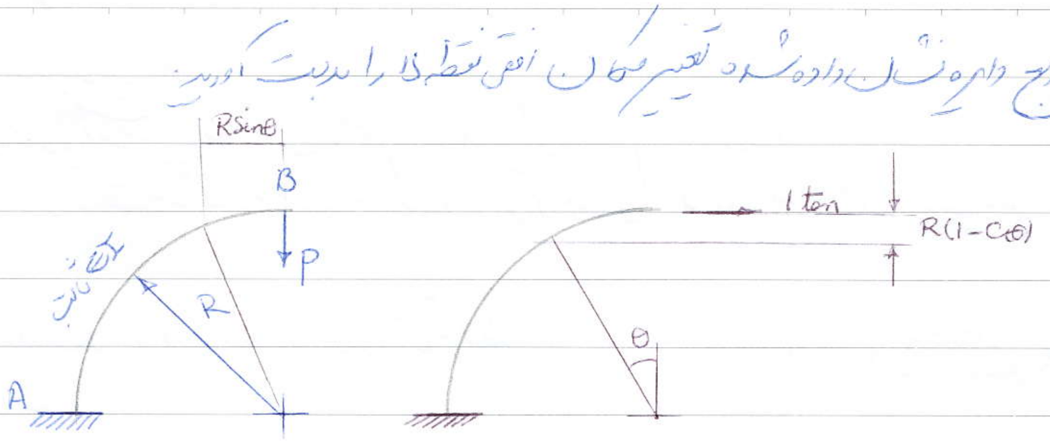
$$\int_0^l \frac{\bar m M\,dx}{EI}=\int_0^{200}\frac{(-2x)(-4x)dx}{EI}+\int_0^{400}\frac{(-x)(-2x)dx}{EI}=1.525\ \text{ton.m}$$

$$1\times\Delta=0.375+1.525=1.9\ \text{cm}$$

## ۷) سازه با اعضای منحنی:

در سازه با اعضای منحنی همان‌طور که گفته شد، همه انتگرال‌ها باید در امتداد شکل انجام پذیرد. به همین ترتیب چنانچه سازه از اعضای قوسی (منحنی) باشد برای محاسبات انتگرال به جای جزء طول dx باید از جزء طول ds استفاده نمود. بدین ترتیب تمام انتگرال‌گیری‌های موجود در روابط انرژی و کار مجازی معتبر می‌باشد، با این تفاوت که به جای dx باید از ds استفاده نمود.

مثال : در طاق ربع دایره شکل داده شده تغییر مکان افقی نقطه B را بدست آورید.




در شکل دایره‌ای بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود.

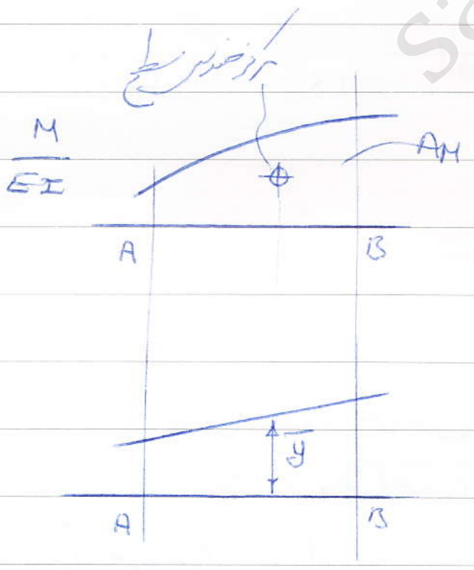
$$1\times\vec{\Delta}_B = \int_0^S \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,ds$$

$ds = Rd\theta$ $\qquad m = -R(1-C\theta)$ $\qquad M = -PR\sin\theta$

$$1\times\Delta = \int_0^L \bar{m}\,\frac{Mds}{EI} \Rightarrow \Delta = \int_0^{\pi/2} -R(1-C\theta)\,\frac{-PR\sin\theta}{EI}\,Rd\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

حل عددی : $\int \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$

در حالتی که تابع حاصل داخل کردیم بعضی مواقع حل انتگرال فوق بصورت تحلیلی میسر نمی‌شود. بجای این کار می‌توان اقدام به رسم نمودارهای $M$ و $\bar{m}$ نمود و انتگرال را به کمک این نمودارها حل نمود. دو روش در این میان متداول است.




1) روش صوره :

$$\int_A^B \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx = A_M\cdot\bar{y}$$

$\bar{y}$ : مقدار $\bar{m}$ در زیر مرکز هندسی سطح $\frac{M}{EI}$

در فاصله AB توابع $\bar{m}$ ، $M$ و $I$ باید پیوسته و ملایم باشند.

$$\int \bar{m}\frac{M}{EI}dx = \frac{h}{6EI}\left[A_0 + 4A_m + A\right]$$

۲) روش ذوزنقه

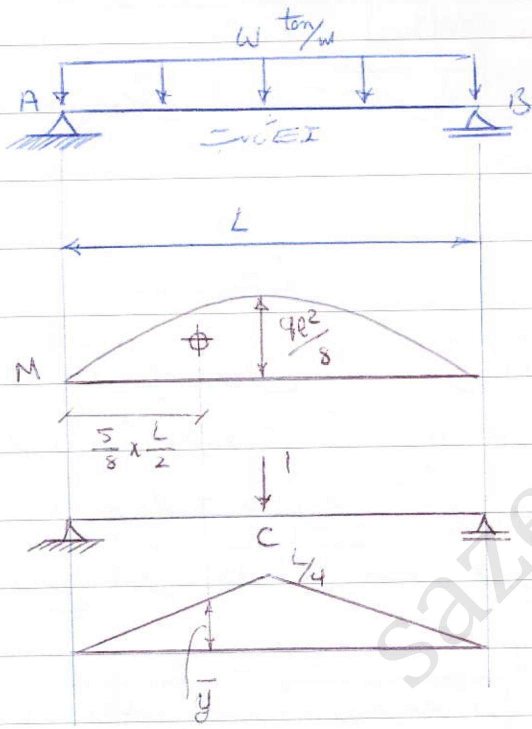
$A_0$ : حاصلضرب $\bar{m}.M$ در ابتدای قطعه

$A_M$ : " " در وسط "

$A$ : " " " انتهای "

$h$ : طول قطعه

در طول h باید I ثابت باشد و $\bar{m}$ و M پیوسته و یکنواخت باشد




$$1\times\Delta_C = \int_A^B \bar{m}\frac{M}{EI}dx = 2\int_A^C \bar{m}\frac{M}{EI}dx$$

روش هندسی

$$\bar{y} = \frac{5}{8}\times\frac{L}{4} = \frac{5}{32}L$$

$$A_m = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{wl^2}{8EI}\right]$$

$$\Delta_C = 2\times\frac{5}{32}L\times\frac{wl^3}{24EI} = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}$$

روش ذوزنقه

$A_0 = 0 \qquad A_m = \frac{L}{8}\times\frac{3}{32}wL^2 \qquad A = \frac{L}{4}\times\frac{wL^2}{8}$

$$\Delta_C^{\downarrow} = 2\left(\frac{L}{6\times2}\right)\frac{1}{EI}\left(0 + 4\times\frac{L}{8}\times\frac{3}{3}wL^2 + \frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{4}\right) = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}\downarrow$$

حمید کاظم

# فصل ششم

## تحلیل سازه‌های نامعین

سازه‌های نامعین دسته بزرگی از سازه‌ها را تشکیل می‌دهند که با توجه به خصوصیت مثبت آن‌ها مورد توجه مهندسین نیز می‌باشد. تحلیل سازه‌های نامعین با استفاده از معادلات تعادل استاتیک و شرایط قابل انجام نمی‌باشد و تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می‌باشد. برای آن‌ها باید معادلات کمکی در نظر گرفت. بر حسب چگونگی انتخاب مجهولات و معادلات کمکی دو فلسفه عمومی برای تحلیل سازه‌های نامعین وجود دارد.

### ۱) روش نیرو (نرمی) Force Method , Flexibility Method ؛

در این روش مجهولات واکنش‌های تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی در نظر گرفته می‌شوند. معادلات اضافی نیز از معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها در نظر گرفته می‌شوند. تکیه بر در این فصل ارائه خواهد شد همین روش می‌باشد.

### ۲) روش تغییر مکان (روش سختی) Displacement Method ، Stiffness Method ؛

در این روش مجهولات، تغییر مکان‌ها و دوران‌های تکیه‌گاهی در نظر گرفته می‌شود و معادلات اضافی شامل معادلات تعادل می‌باشد. اساس این روش معادلات شیب افت می‌باشد که موضوع درس تحلیل ۲ است. در کنار این روش، روش توزیع لنگر کراس، روش تکرار کانی، روش‌های عددی برای حل معادلات شیب افت هستند. در اواخر در تحلیل ماتریسی سازه‌ها هر دو این دو فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی برتری در تحلیل ماتریسی روش سختی است.

### روش نیرو — روش سازگاری تغییر شکل‌ها ← روش نرمی

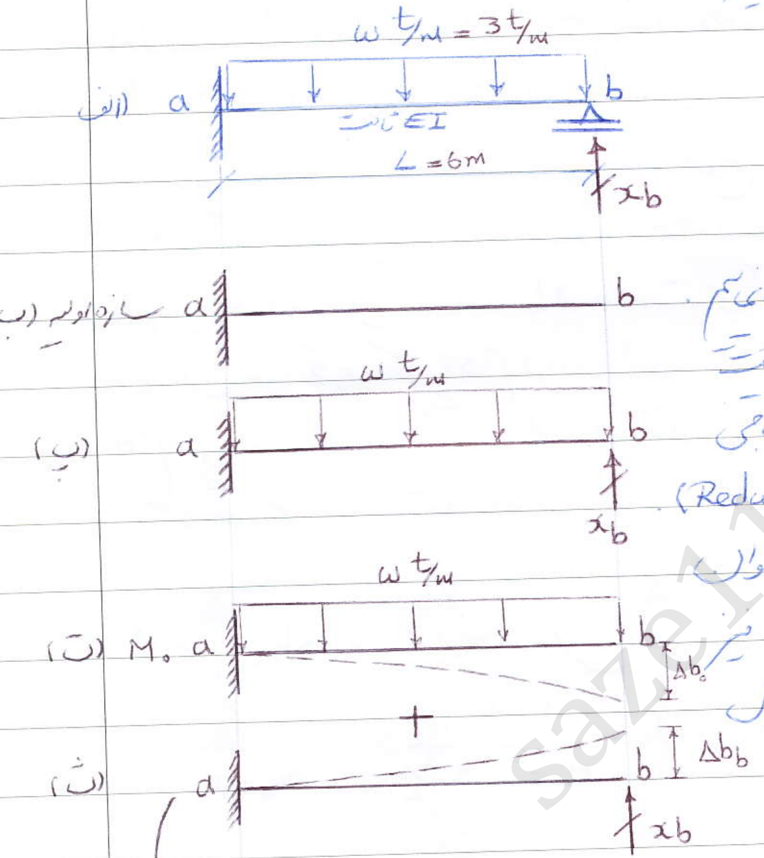
برنامه درس ما برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده از روش نیرو یا سازگاری تغییر شکل‌هاست. در این روش ابتدا درجه نامعینی سازه باید تشخیص داده شود. اگر در این امر مشکلی بوجود آید، در ادامه حل مسئله بی‌فایده خواهد بود.
به تعداد درجات نامعینی باید معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها را نوشت تا سازه قابل تحلیل باشد. طی فصل‌های بعد دو روش کار از آن ارائه می‌گردد. در تحلیل سازه‌های نامعین به چند نکته باید توجه داشت.

۱) برای تحلیل سازه‌های نامعین از خواص الاستیک اعضا مثل مدول الاستیسیته $E$ و $G$ و مشخصات هندسی مقطع مثل $A$ و $I$ استفاده می‌گردد. بنابراین این مقادیر در نتایج ۹۶٪ تأثیر دارند.

۲) تحلیل در محدودهٔ الاستیک خطی است. یعنی جایی که $\sigma$ و $\varepsilon$ نسبت خطی دارند $(\sigma = E\varepsilon)$

۳) لنگر سازهٔ نامعین تحلیل می‌شود باید تحرک کامل همراه با تغییر شکل‌ها داشته باشد.

مراحل تحلیل سازه نامعین به کمک سازگاری تغییر شکل‌ها:




گام ۱، تعیین درجه نامعینی

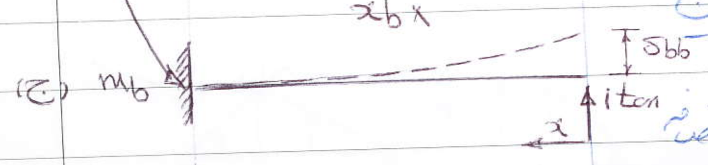
در این مثال درجه نامعینی $n=1$ می‌باشد.

گام ۲، انتخاب مجهول اضافه

به تعداد درجات نامعینی می‌باید مجهول اضافه انتخاب نمائیم. انتخاب مجهولات اضافی دلخواه است ولی باید دقت نمائیم که سازه‌ای که پس از حذف مجهول اضافه باقی می‌ماند پایدار و معین باشد (مجهول اضافه Redundent). در مثال مورد بحث واکنش تکیه‌گاهی نقطهٔ B به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد. البته انتخاب $M_a$ نیز می‌تواند صحیح باشد ولی به هر حال در انتخاب مجهول اضافه سهولت کار نیز باید مورد توجه باشد.

$$\Delta_b = \Delta b_0 + \Delta bb = 0$$

$x_b \times$




گام ۳، سازه اولیه (primary structure)

سازه‌ای که بعد از حذف مجهول اضافه و بارهای خارجی باقی می‌ماند به سازه اولیه معروف است. این سازه باید پایدار و معین باشد.

گام ۴، اکنون سازه اولیه تحت بار خارجی و مجهول اضافه در نظر گرفته می‌شود. از این لحظه به بعد مجهول اضافی مانند یک بار خارجی خواهد بود.

گام ۵، اکنون سازه اولیه تحت بار خارجی و مجهول اضافه به دو سازه تجزیه می‌شود. سازه اول، سازه اولیه تحت

$$\Delta bb = x_b\ \delta bb$$

$$\Delta b_0 + x_b\ \delta bb = 0$$

$$\rightarrow x_b = -\frac{\Delta b_0}{\delta bb}$$

بارهای خارجی در سازه دوم به سازه اولیه تحت مجهول اضافی می باشد. ترکیب این دو سازه معین سازه واقعی حاصل باشد که در یکی از آن‌ها مجهول $x_b$ وجود دارد. برای تعیین مجهول $x_b$ باید از یک شرط سازگاری استفاده نمود.

گام ۶: نوشتن معادله سازگاری تغییر شکل:

دو سازه تجزیه شده دارای تغییر شکل‌های مشابه شکل می‌باشند. در سازه اول تغییر مکان قائم نقطه b (که جهت در امتداد مجهول اضافی است) با حرف $\Delta b_0$ نشان داده می‌شود. اندیس اول نشان نقطه و اندیس دوم نشان دهنده حالت است. ($x_b = 0$) و تغییر مکان قائم نقطه b با نماد $\Delta_{bb}$ نشان داده می‌شود که اندیس اول نشان دهنده نقطه و اندیس دوم نشان دهنده حالت است. برای اینکه مجموع این دو سازه برابر سازه اصلی باشد مجموع این دو تغییر مکان باید برابر صفر باشد. معادله نوشته شده معادله سازگاری تغییر مکان گویند. از این معادله حل شود $x_b$ بدست می‌آید و برای اینکه این معادله ساده‌تر حل شود می‌توان یک تجزیه دیگر انجام داد.

گام ۷: محاسبه تغییر مکان‌ها، معادله مجهول اضافه قابل تعیین است. برای محاسبه تغییر مکان‌ها از هر روشی می‌توان استفاده نمود.

محاسبه $\Delta b_0$: روش کار مجازی    ج = سازه مجازی    ت = سازه واقعی

$$1\times\Delta b_0^{\uparrow} = \int \bar{m}\frac{M}{EI}dx = \int_0^6 m_b\frac{M_0}{EI}dx \qquad M_0 = -3\frac{x^2}{2}\ ,\quad m_b = x$$

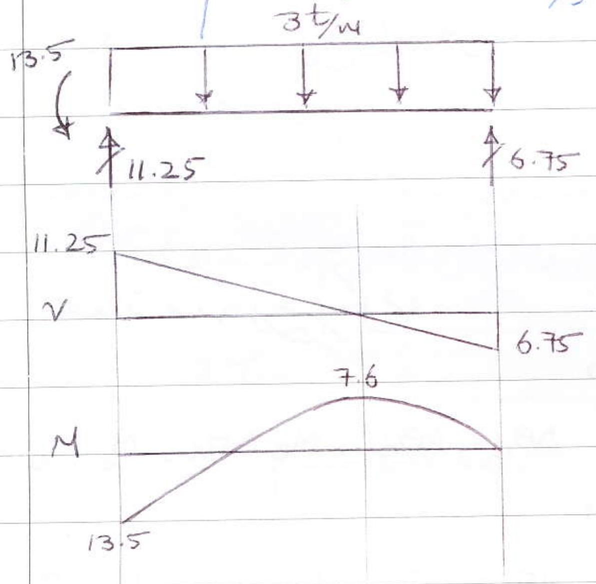
$$1\times\Delta b_0^{\uparrow} = \int_0^6 (x)\left(-\frac{3x^2}{2}\right)dx = \frac{-486}{EI}$$

محاسبه $\delta_{bb}$:    ج = سازه مجازی    ج = سازه واقعی

$$1\times\delta_{bb}^{\uparrow} = \int_0^6 m_b\cdot\frac{m_b}{EI}dx = \int_0^6 x\,\frac{x}{EI}dx = \frac{72}{EI}$$

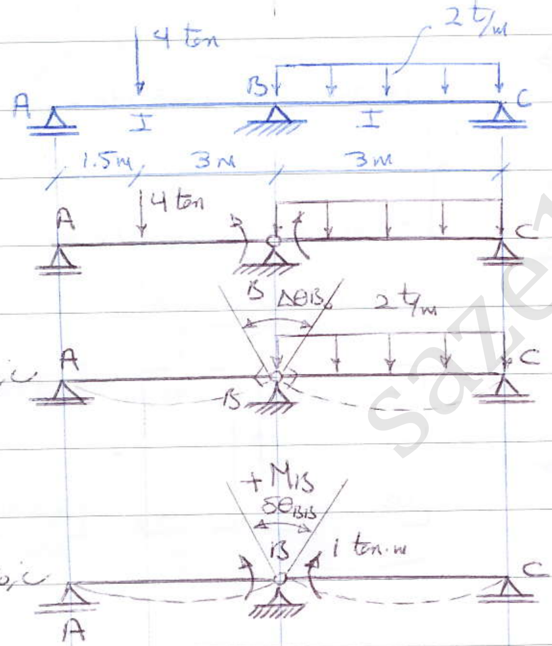
$$-\frac{486}{EI} + x_b\frac{72}{EI} = 0 \Rightarrow x_b = 6.75 \Rightarrow R_b = 6.75\ \text{ton}\uparrow$$

اگر $R_b$ مثبت بدست آید معنی آن است که این واکنش در امتداد بار وارده می‌باشد. پس از تعیین $R_b$ سایر واکنش‌ها تعیین شده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می‌گردد.




یکی از مزایای مثبت سازه نامعین کاهش نیروهای داخلی آن است. به عنوان مثال اگر این سازه خود از نوع دو واکنش $R_b$ وجود نداشت ممان خمشی آن در نقطه a برابر 54 ton.m می‌شد که با مقدار بدست آمده قابل مقایسه نیست.






سازه اولیه تحت بار خارجی

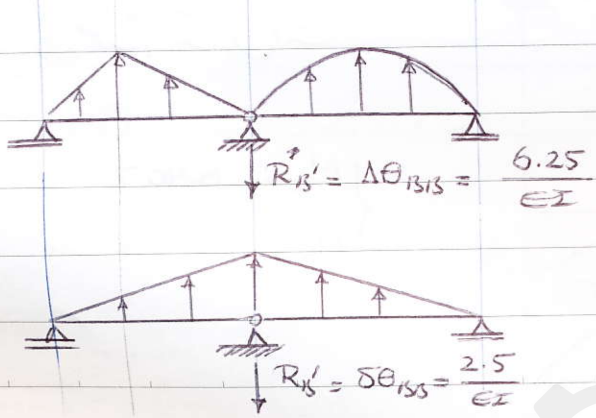
سازه اولیه تحت واکنش مجهول اضافی

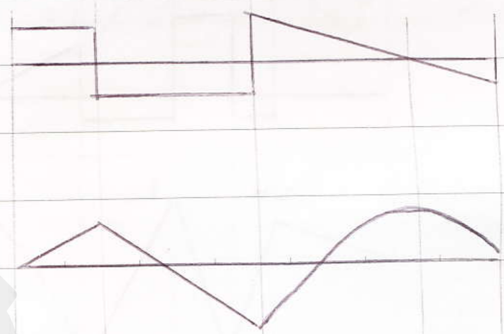
گام ۱ $n=1$

گام ۲ $M_B$ لنگر داخلی تیر در تکیه‌گاه B است. تجربه نشان داده در تیرهای سراسری انتخاب لنگر تکیه‌گاهی به عنوان مجهول اضافی باعث راحتی کار می‌شود.

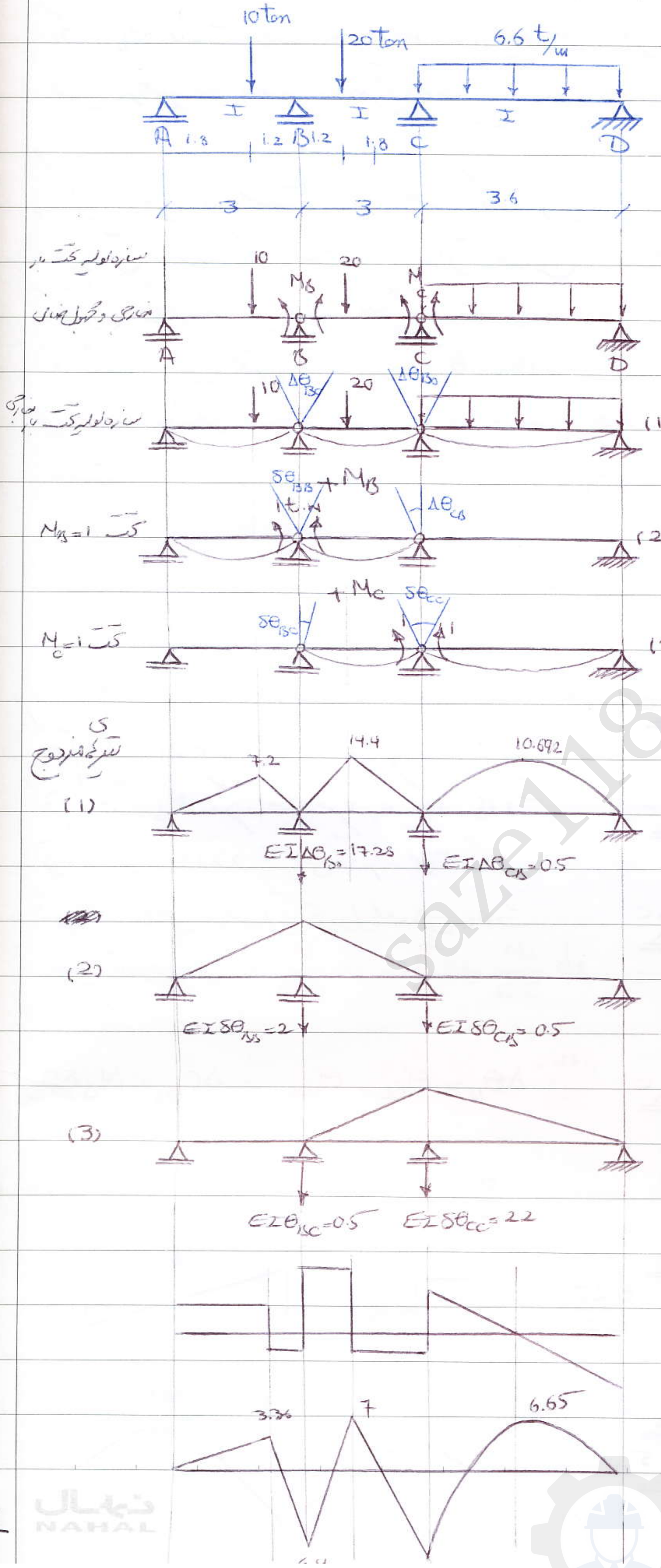
$$\Delta\theta_B = \theta_{BL} - \theta_{BR} = \Delta\theta_{B_0} + M_B\,\delta\theta_{BB}$$

$$\frac{6.25}{EI} + M_B \cdot \frac{2.5}{EI} = 0 \rightarrow M_B = -2.5\ \text{ton.m}$$



## تیر سراسری با دو درجه نامعینی




در تجزیه سازه اولیه برای هر مجهول اضافی به طور جداگانه عمل می کنیم

معادلات سازگاری تغییر شکل ها

$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{B0} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{C0} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\begin{cases} 17.28 + 2M_B + 0.5M_C = 0 \\ 22.91 + 0.5M_B + 2.2M_C = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2.2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نرمی}} \begin{bmatrix} M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.28 \\ 22.91 \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمی همیشه متقارن است

$$\begin{cases} M_B = -6.40 \text{ ton.m} \\ M_C = -8.96 \text{ ton.m} \end{cases}$$

## تحلیل خرپاهای نامعین :

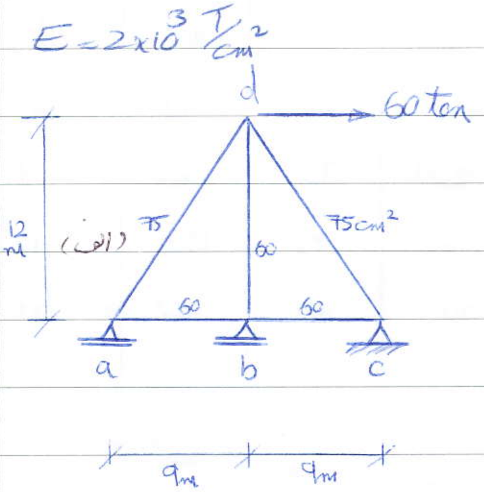
خرپا می تواند به یکی از ۳ حالت زیر نامعین باشد.

۱) نامعین خارجی : در این حالت مجهول اضافه یکی از واکنش های تکیه گاهی انتخاب می گردد.

۲) نامعین داخلی : وقتی است که نامعینی بعلت نیروهای داخلی اعضاء باشد. در این حالت مجهول اضافه نیروی داخلی بعنوان انتخاب می گردد.

۳) نامعین خارجی و داخلی : در این حالت نامعینی بعلت وجود تکیه گاه های اضافه و هم چنین اعضاء اضافی می باشد و مجهول اضافه ترکیبی از واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی خواهد بود.

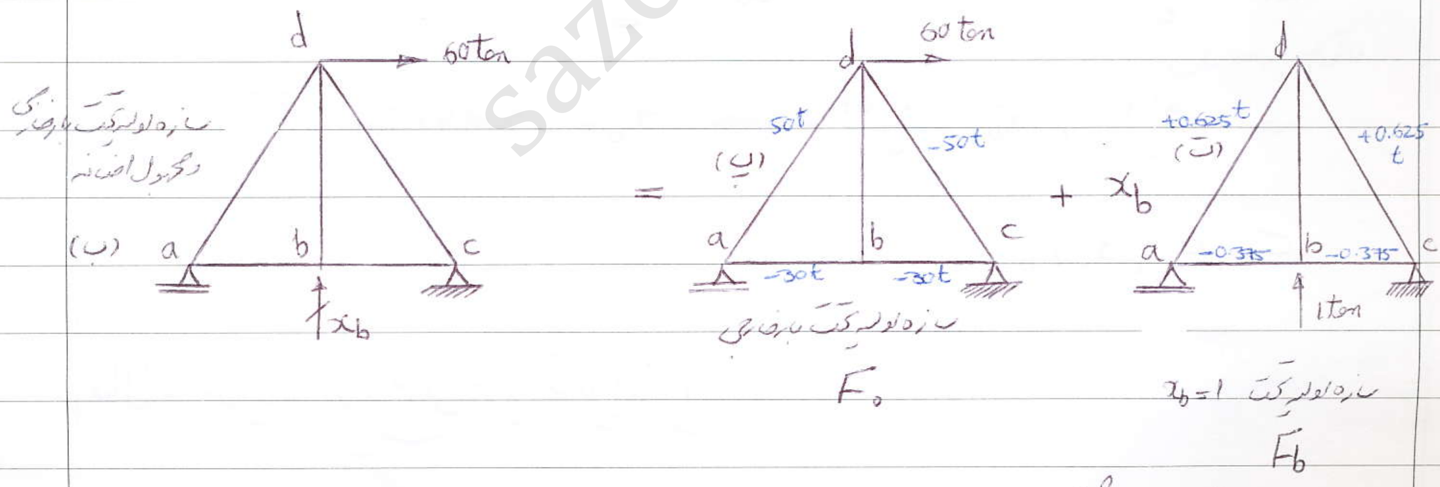
مثال ۱ : خرپای نامعین خارجی زیر را تحلیل کنید.




خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین خارجی است. واکنش تکیه گاهی b به عنوان مجهول اضافه انتخاب می گردد.

معادله سازگاری تغییر شکل :

$$\Delta_b\uparrow = \Delta_{b0}\uparrow + x_b\,\delta_{bb}\uparrow = 0$$




۱) محاسبه $\Delta_{b0}\uparrow$ (روش کار مجازی) :

ت : سازه مجازی

پ : سازه حقیقی

$$1\times\Delta_{b0}\uparrow = \sum F_b \frac{F_0 L}{EA} = \frac{1}{E}\sum F_b \frac{F_0 L}{A}$$

۲) محاسبه $\delta_{bb}$ (کار مجازی):                ت و سازه معین می‌کنیم

$$1 \times \delta_{bb} = \sum \frac{F_b^2 L}{EA} = \frac{1}{E} \sum \frac{F_b^2 L}{A}$$

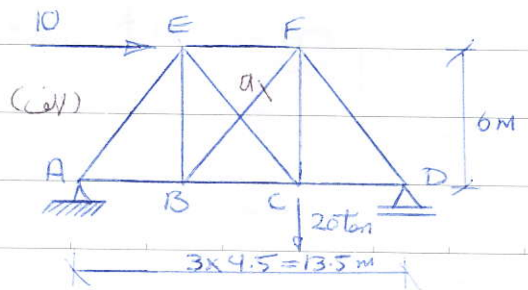
| $F = F_o + x_b F_b$ ton | $F_b^2 L/A$ $ton^2/cm$ | $F_o F_b L/A$ $ton^2/cm$ | $F_b$ ton | $F_o$ ton | $L/A$ $1/cm$ | $A$ $cm^2$ | $L$ cm | عضو واحد |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -26.82 | +2.11 | +168.6 | -0.375 | -30 | 15 | 60 | 900 | ab |
| -26.82 | +2.11 | +168.6 | -0.375 | -30 | 15 | 60 | 900 | bc |
| +44.7 | +7.81 | +625 | +0.625 | +50 | 20 | 75 | 1500 | ad |
| -55.3 | +7.81 | -625 | +0.625 | -50 | 20 | 75 | 1500 | dc |
| +8.47 | +20 | 0 | -1 | 0 | 20 | 60 | 1200 | bd |
| | +39.84 | +337.2 | | | | | | |

$$\Delta b_o = \frac{337.2}{E} \qquad \delta_{bb} = \frac{39.84}{E}$$

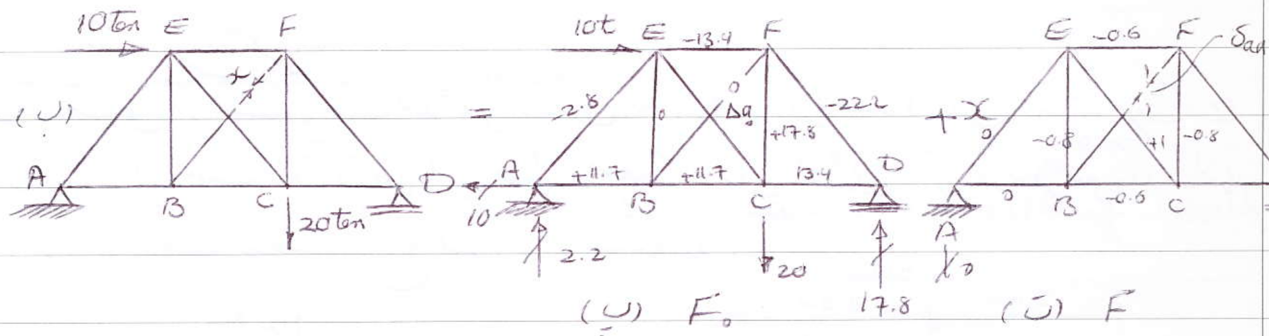
$$\Rightarrow \frac{337.2}{E} + x_b \frac{39.84}{E} = 0 \Rightarrow x_b = -8.47\ ton$$

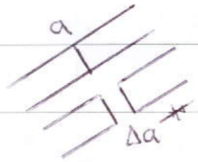
$$F = F_o + x_b F_b$$

مثال ۲: خرپای نامعین داخلی زیر را تحلیل کنید.




خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین داخلی است. نیروی داخلی عضو BF به عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌شود. سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافه به صورت شکل نشان داده شده می‌باشد.




$$\Delta a^* = \Delta a_0 + x\,\delta_{aa} = 0$$

سازه واقعی (ت)

سازه مجازی (پ)

(ت) واقعی    (پ) مجازی      محاسبه $\Delta a_0$

$$1 \times \Delta a_0^* = \frac{1}{E} \sum F_0 \frac{fl}{EA}$$

واقعی , مجازی → (ت)      محاسبه $\delta_{aa}$

$$1 \times \delta_{aa}^* = \frac{1}{E} \sum \frac{f^2 l}{EA}$$

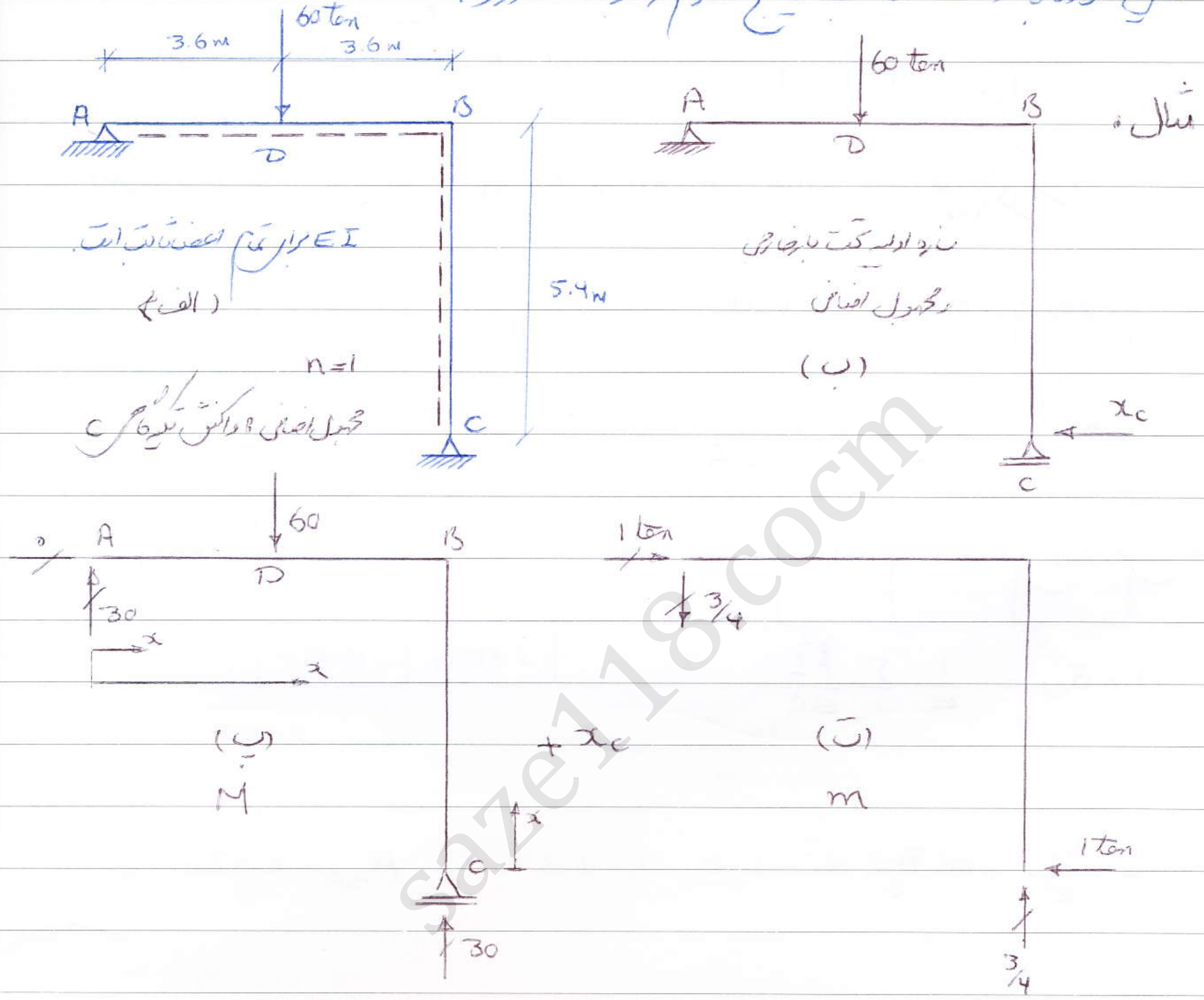
با توجه به جدول در کتاب

$$-\frac{119.7}{E} + x\,\frac{51.8}{E} = 0 \rightarrow x = 2.3 \qquad F_{BF} = 2.3\ \text{ton}$$

## تحلیل قاب‌های نامعین:

قاب که متشکل از اعضای تحت لنگر خمشی و نیروی برشی و بعضی از اعضای آن تحت نیروی محوری نیز قرار دارند. در اغلب اوقات می‌توان فقط با منظور کردن انرژی ناشی از لنگر خمشی آن‌ها را کشش نموده با دقت مناسب نتایج لازم را بدست آورد.

مثال:




سازگاری: $\overleftarrow{\Delta}_C = \overleftarrow{\Delta}_{C0} + X_C \overleftarrow{\delta}_{CC} = 0$ محقق در پ

محاسبه $\overleftarrow{\Delta}_{C0}$:

$$\Delta_{C0} = \int m \frac{M}{EI} dx = \int_A^D + \int_D^B + \int_C^B$$

ناحیه AD: $0 < x < 3.6 \Rightarrow M = 30x \quad m = -\frac{3}{4}x$

ناحیه DB: $3.6 < x < 7.2 \Rightarrow M = 30x - 60(x - 3.6) \quad m = -\frac{3}{4}x$

CB ناحیه : $0 < x < 5.4$ $\quad M = 0 \quad m = -x$

$$\Delta_{C0} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{3.6}(30x)(-0.75x)dx + \int_{3.6}^{7.2}(-30x+216)(0.75x)dx + \int_0^{5.4}(0)(-x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\left[-0.75x^3\right]_0^{3.6} + \left[7.5x^3 - 81x^2\right]_{3.6}^{7.2}\right) = -\frac{1050}{EI}$$

محاسبه $\delta_{CC}$ : تحت بار ۱ :

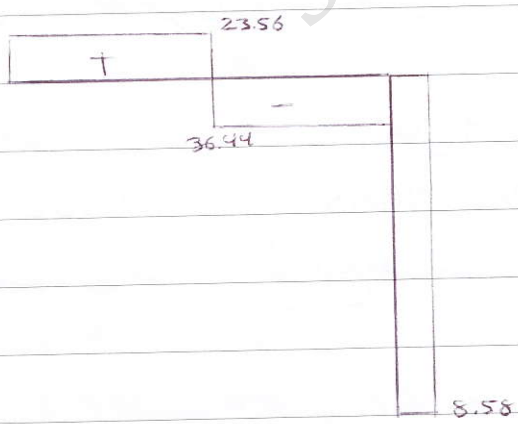
$$\delta_{CC} = \int \frac{m^2}{EI}dx = \int_A^B + \int_C^B$$

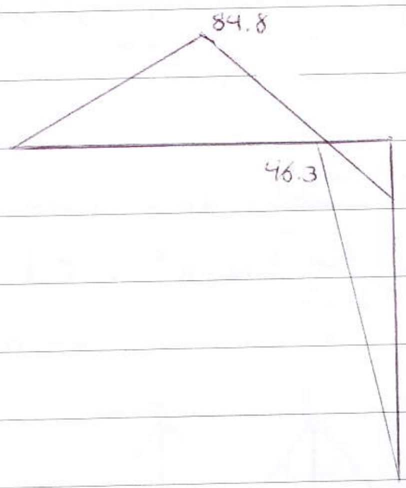
AB ناحیه : $0 < x < 7.2$ $\quad m = -\frac{3}{4}x$

BC ناحیه : $0 < x < 5.4$ $\quad m = -x$

$$\to \delta_{CC} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{3.6\times 2}(-0.75x)^2dx + \int_0^{5.4}(-x)^2dx\right) = \frac{122.5}{EI}$$

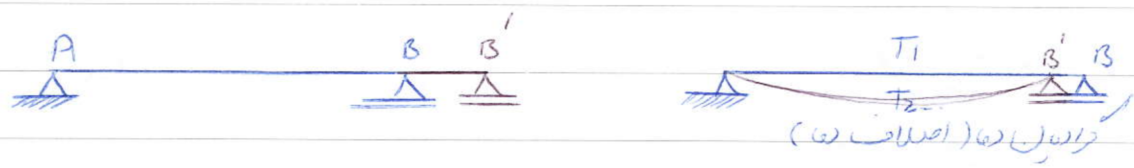
$$-\frac{1050}{EI} + \frac{122.5}{EI}x_C = 0 \to x_C = 8.58 \to R_{Cx} = 8.58\ \text{ton}\ \leftarrow$$



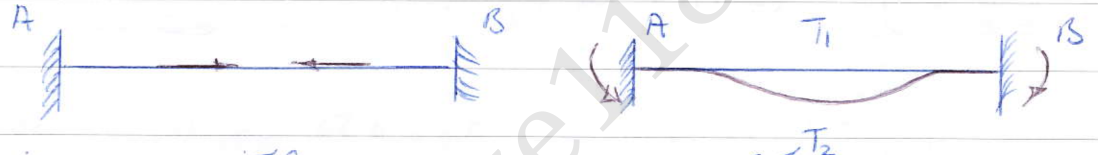
## اثر حرارت و نشست تکیه‌گاهی در سازه‌های نامعین

تأثیر حرارت و نشست تکیه‌گاهی را در فصل پنجم در سازه‌های معین مطالعه کردیم. ملاحظه شد که در سازه‌های معین، در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی فقط تغییر شکل ایجاد می‌شود و هیچگونه نیروی داخلی بوجود نمی‌آید. زیرا قیدی در مقابل تغییر شکل‌ها نیست. موضوع را می‌توانیم با بررسی یک تیر ساده دید که در آن ملاحظه می‌شود در تغییرات دما هیچ تأثیری بر نیروهای داخلی ندارد.




$T_2 > T_1$

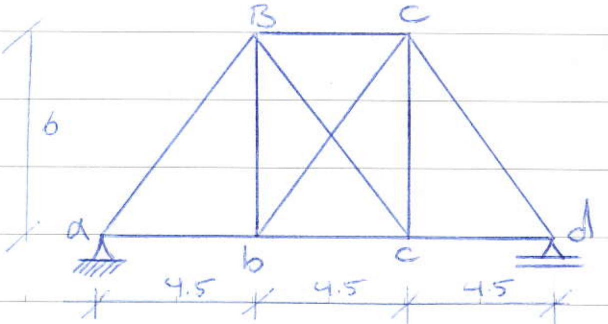
اما در سازه‌های نامعین، شرایط متفاوت است. به علت قیدهای اضافی که به طور ذاتی در سازه‌های نامعین وجود دارد در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی، سازه قادر به تغییر شکل طبیعی خود نیست و برای انطباق با شرایط تغییر شکلی، در آن یک سری نیروی داخلی ایجاد می‌گردد. موضوع را می‌توان با یک مثال تیر ساده که دو انتها گیردار شده تحقیق نمود.

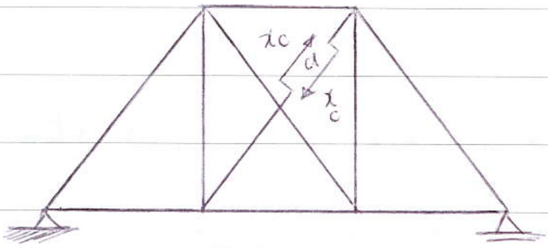



در این مبحث با استفاده از اصل جمع آثار قوا تحلیل سازه‌های نامعین در اثر تغییرات دما و همچنین نشست تکیه‌گاهی مورد توجه قرار می‌گیرد.

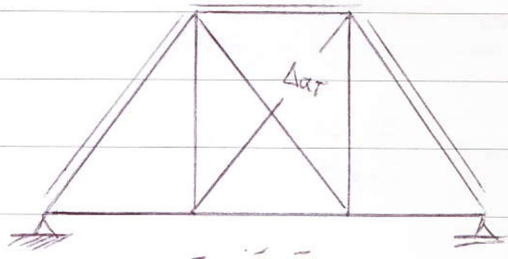
مثال: مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی بوجود آمده در اعضای خرپای زیر به علت افزایش دما به میزان $33^\circ C$ در اعضای aB، BC، cd. $\alpha_T = \frac{1}{84000} = 12\times10^{-6}$

$E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$ است. سطح مقطع کلیه اعضا $65\ cm^2$ است.






سازه اولیه (ب)



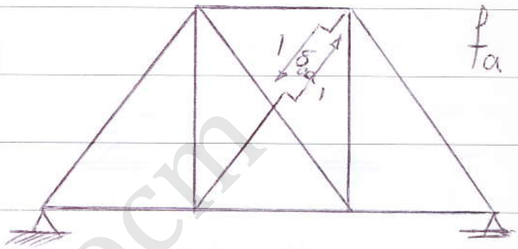

سازه اولیه تحت تغییرات دما (پ)

+

$x_c$

$n=1$ و نیروی عضو bC به عنوان مجهول اضافی

$$\Delta_a^* = \Delta_{aT}^* + x_c\, \delta_{aa}^* = 0$$




(ت)

محاسبه $\Delta_{aT}$ : (طبق کار مجازی)

$$1 \times \Delta_{aT}^* = \Sigma f_a \cdot \Delta L$$

$$\Delta L = \alpha_t L (\Delta T)$$

$$1 \times \Delta_{aT} = \alpha_t \Sigma f_a (\Delta T) L$$

محاسبه $\delta_{aa}^*$ : (طبق کار مجازی)

$$1 \times \delta_{aa}^* = \frac{1}{E} \Sigma \frac{f_a^2 L}{A}$$

| عضو راصد | $L/A$ 1/cm | $f_a$ ton | $f_a^2 \frac{L}{A}$ | $\Delta T$ c° | $f_a \Delta T L$ ton.c°.cm | $F = F_0 + x_a f_a$ ton |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BC | 6.92 | -0.6 | 2.49 | 33 | -8910 | -3.18 |
| bc | 6.92 | -0.6 | 2.49 | 0 | 0 | -3.18 |
| Bb | 9.23 | 0.8 | 5.91 | 0 | 0 | -4.24 |
| Cc | 9.23 | 0.8 | 5.91 | 0 | 0 | -4.24 |
| Bc | 11.54 | 1 | 11.54 | 0 | 0 | 5.3 |
| bC | 11.54 | 1 | 11.54 | 0 | 0 | 5.3 |
| $\Sigma$ | | | 39.88 | | -8910 | |

$f_a$ اعضای باقی صفر نوشته نشده اند.

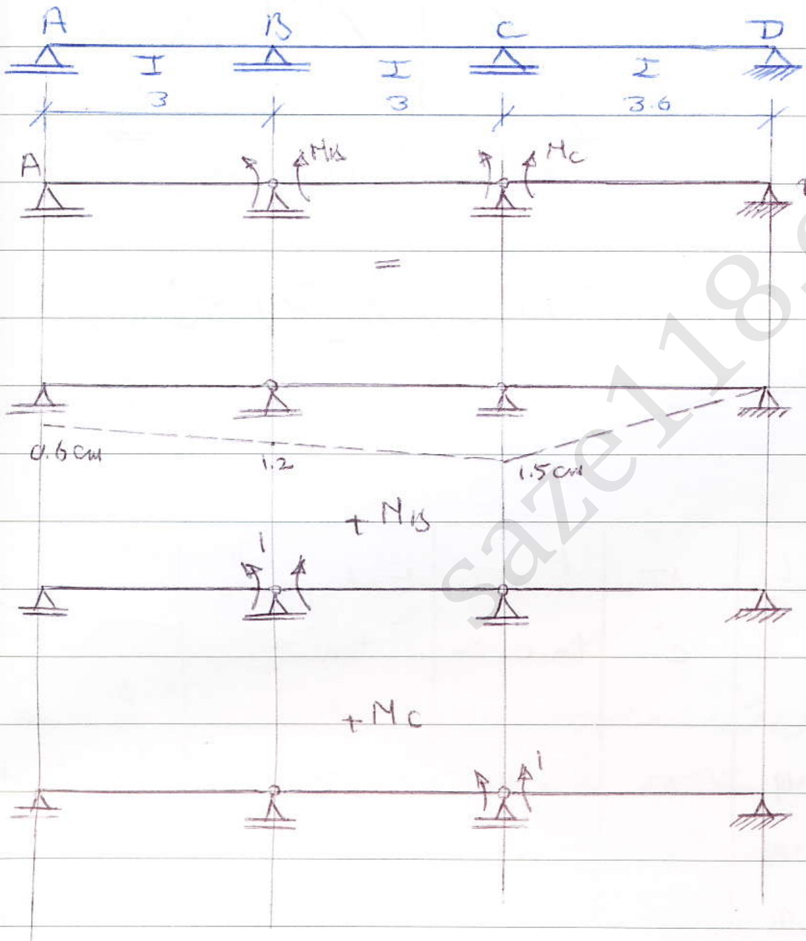
$$\Delta^*_{aT} = -8910\left(\frac{1}{84000}\right) = -0.106 \text{ cm}$$

$$\delta_{aa} = \frac{39.88}{2\times10^3} = 0.02 \quad \rightarrow -1.06 + 0.02x = 0 \quad \rightarrow x = 5.3 \text{ ton}$$

سازه نامعین تحت نشست تکیه‌گاهی

مثال: $A = 0.6\text{cm}\downarrow$, $B = 1.2\text{cm}\downarrow$, $C = 1.5\text{cm}\downarrow$, $D = 0$

نیروهای داخلی را به علت نشست تکیه‌گاهی بدست آورید.




$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{BS} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{CS} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\theta_{AB} = -\frac{1.2-0.6}{300} = -0.002$$

$$\theta_{BC} = (-1)\frac{1.5-1.2}{300} = -0.001$$

$$\theta_{CD} = \frac{1.5}{300} = 0.004167$$

$$\Delta\theta_{BS} = \theta_{BL} - \theta_{BR} = -0.001$$

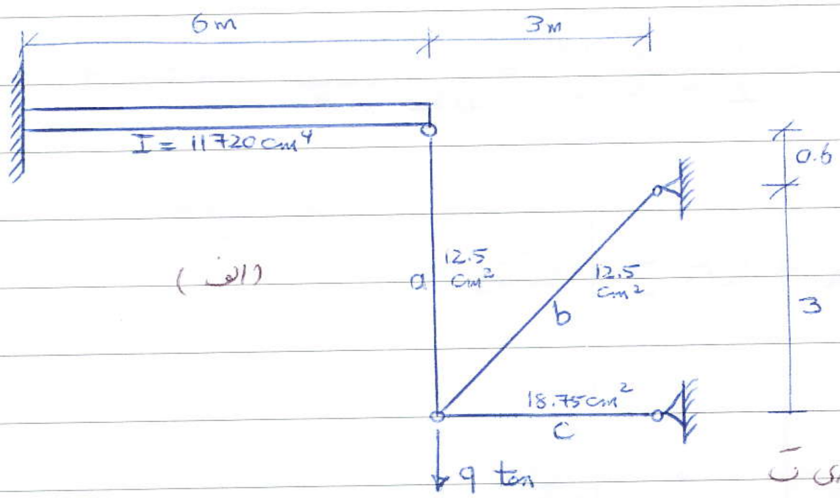
$$\Delta\theta_{CS} = \theta_{CL} - \theta_{CR} = -0.005167$$

$$\begin{cases} -0.001 + \dfrac{2}{EI}M_B + \dfrac{0.5}{EI}M_C = 0 \\ -0.005167 + \dfrac{0.5}{EI}M_B + \dfrac{2.2}{EI}M_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} M_B = -0.000092\,EI \\ M_C = +0.00237\,EI \end{matrix}$$

## سازه‌های ترکیبی نامعین

در سازه‌های ترکیبی نامعین همواره باید اثر نیروهای محوری و خمشی در نظر گرفته شود.

مثال:




(الف)

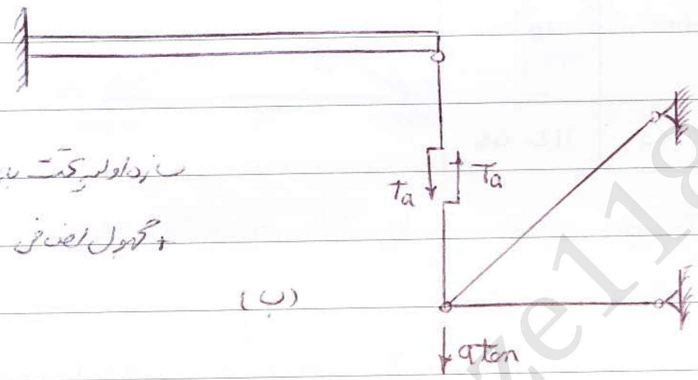
D=1

نیروی عضو a به عنوان مجهول اضافی

$$\Delta a^{*} = \Delta a_0 + T_a \delta_{aa} = 0$$

محاسبه $\Delta a_0$ ، و الگوی پ مبنای ت

$$E\Delta a_0 = \int m_a \frac{M_0}{\cancel{E}I} dx + \sum f_a \frac{F_0}{A} L$$




سازه اولیه که تحت نیروی خارجی

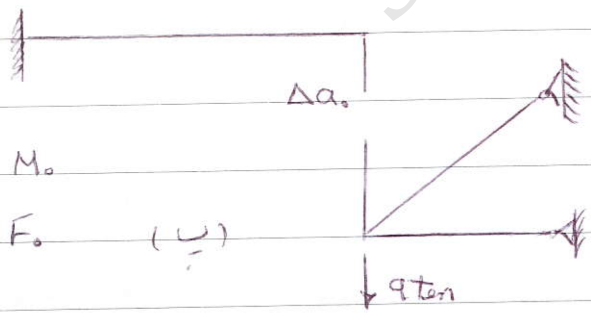
+ مجهول اضافی

(ب)

محاسبه $\delta_{aa}$ ، و الگوی و مبنای ت

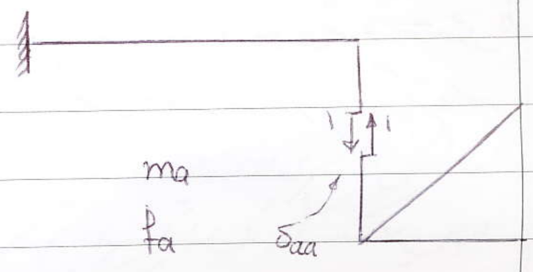
$$E\delta_{aa} = \int \frac{m_a^2}{I} dx + \sum \frac{f_a^2}{A} L$$

واحد نیرو تن و طول cm




(پ)

$+ T_a$




(ت)

محاسبه مقادیر انتگرال :

$M_0 = 0 \qquad m_a = -x$

$$\int \frac{M_0}{I} dx = 0$$

$$\int_0^{600} \frac{m_a^2}{I} dx = \int_0^{600} \frac{x^2}{I} dx = \frac{1}{I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{600} = \frac{1}{11720} \times \frac{600^3}{3} = 6143.34$$

| عضو واحد | $L/A$ | $F_0$ | $f_a$ | $f_a F_0 \frac{L}{A}$ | $f_a^2 L/A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 28.8 | 0 | 1 | 0 | 28.8 |
| b | 33.94 | 12.73 | -1.414 | -610.93 | 67.86 |
| c | 16 | -9 | 1 | -144 | 16 |
| | | | | -754.93 | 112.66 |

$-754.93 + (6143.34 + 112.60)\, T_a = 0$

$T_a = 0.12$

$T_b = 12.73 - 1.414 \times 0.12 = 12.56 \text{ ton} \qquad T_e = -9 + 1 \times 0.12 = -8.88 \text{ ton}$

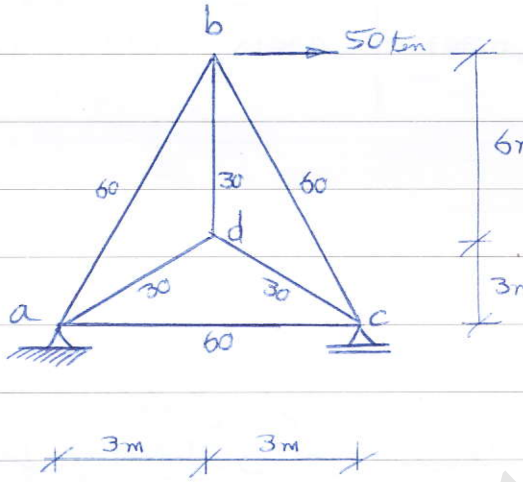
از نیروی خارجی 9t فقط 0.12 ton به تیر خمشی می‌رسد و باقی آن توسط b و c گرفته می‌شود به خصوص b. این موضوع یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های سازه‌های نامعین است، یعنی عضو سخت‌تر نیروی بزرگتر و عضو نرم‌تر سهم کوچکتری را می‌برد.

## روش کار حداقل :

از قضیه تغییر شکل کاستیلیانو می‌توان به طور مستقیم برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده کرد. در این روش نیاز به معادلات سازگاری تغییر شکل هم نداریم. به همین علت ممکن است به نظر دانشجویان ساده‌تر بیاید ولی این روش چند محدودیت دارد:

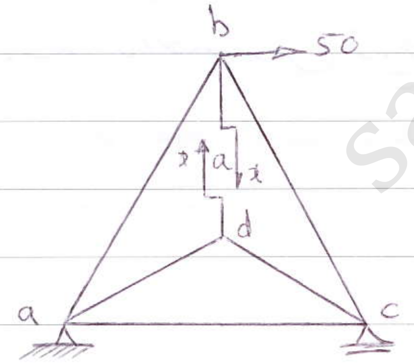
۱) نمی‌توان سازه نامعین را تحت آثار حرارتی و نشست تکیه‌گاهی تحلیل نمود.

۲) به کارهای بیشتری نیاز دارد و اگر بخواهیم به تکنیک‌های عددی متوسل شویم، دقیقاً همان روش سازگاری تغییر شکل‌ها خواهد شد.




مثال :

$n=1$ نیروی عضو bd به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌شود.




در این مرحله به جای نوشتن روابط سازگاری تغییر شکل‌ها قضیه کاستیلیانو را برای نقش تغییر مکان مربوط به مجهول اضافه اعمال می‌کنیم که همان روابط سازگاری است.

$$\Delta_a^{\updownarrow} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

اما شکل ظاهری معادله فوق مثل مشتق‌گیری نسبت به یک متغیر است، بدین معنا که اگر آن را تفسیر کنیم این معنی را می‌دهد که مقدار مجهول اضافه باید طوری باشد که به ازای آن تابع انرژی حداقل گردد. از این لحاظ به آن روش کار حداقل می‌گوییم.

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2EA}$$

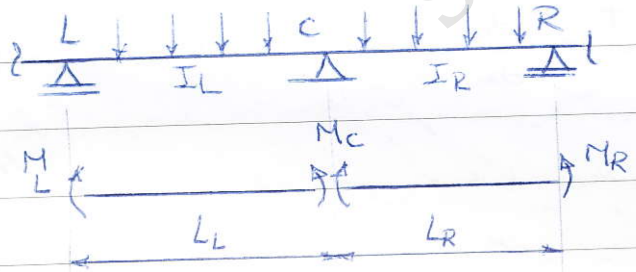
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} \sum \frac{FL}{A} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

| $F\frac{L}{A}\frac{\partial F}{\partial x}$ ton/cm | $\partial F/\partial x$ ton/cm | F ton | L/A 1/cm | عضو واحد |
|---|---|---|---|---|
| $-660+4.41x$ | $-0.529$ | $79-0.529x$ | 15.8 | ab |
| $+660+4.41x$ | $-0.529$ | $-79-0.529x$ | 15.8 | bc |
| $-83.3+1.11x$ | $-0.333$ | $25-0.333x$ | 10 | ca |
| $7.05x$ | $+0.707$ | $+0.707x$ | 14.1 | ad |
| $+20x$ | $+1$ | $+x$ | 20 | bd |
| $+7.05x$ | $+0.707$ | $+0.707x$ | 14.1 | cd |
| $-83.3+44.03x$ | | | | |

$$\Rightarrow x=\frac{53.3}{44.03}=1.89\ \text{ton}$$

## رابطه ۳ لنگری:

در قرن ۱۹ میلادی یک مهندس فرانسوی به نام کلاپیرون رابطه‌ای بین ۳ لنگر تکیه‌گاهی متوالی از یک تیر سراسری برقرار نمود و مدت‌ها این روش برای تحلیل تیرهای سراسری استفاده می‌شد. با ابداع روش توزیع لنگرها گرایش این روش منسوخ شد.




$$M_L\frac{L_L}{I_L}+2M_c\left(\frac{L_L}{I_L}+\frac{L_R}{I_R}\right)+M_R\frac{L_R}{I_R}=-\frac{L_0}{I_L}-\frac{R_0}{I_R}+6E\left[\frac{\delta_L}{L_L}-\delta_c\left(\frac{1}{L_L}+\frac{1}{L_R}\right)+\frac{\delta_R}{L_R}\right]$$

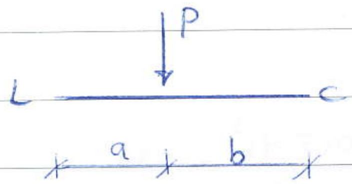
$\delta_L =$ نشست تکیه‌گاه چپ $\uparrow +$

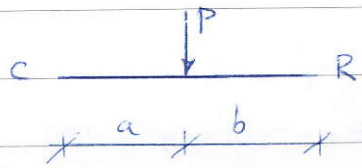
$\delta_C =$ نشست تکیه‌گاه وسط $\uparrow +$

$\delta_R =$ نشست تکیه‌گاه راست $\uparrow +$

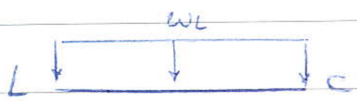
اگر یکی تکیه‌گاه‌ها هم‌زمان نشست کند (در اثر نشست) این دگرش می‌دهیم

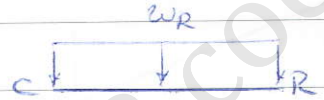
توابع بارگذاری $L_0$ و $R_0$ :



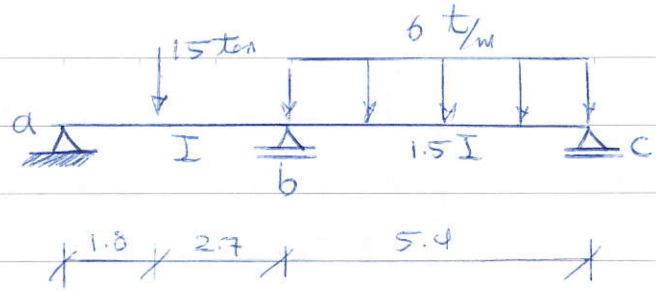

$$L_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L} \qquad R_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$$




$$L_0 = \frac{w_L L_L^3}{4} \qquad R_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$$

$$I_L = I_R \Rightarrow M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R =$$
$$-L_0 - R_0 + 6EI\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_C\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{R_L}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right]$$



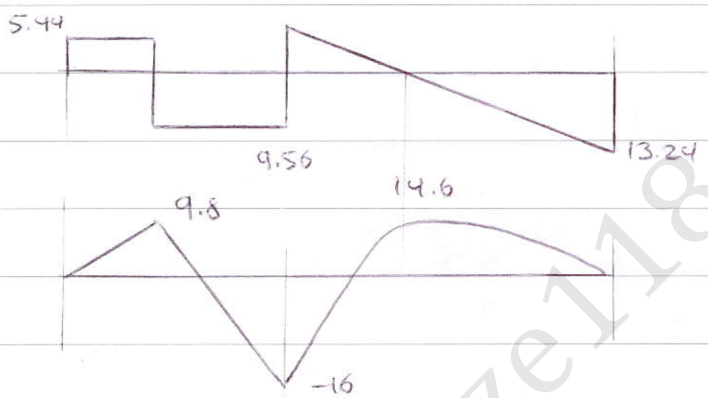

تیر سراسری مقابل ۱ درجه نامعین است. به تعداد درجات نامعینی همواره با نوشتن رابطه ۳ لنگری تولید معادله مستقل ایجاد و کفایت می‌کند

$M_a = 0 \qquad M_b = ? \qquad M_c = 0$

$\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$

$L_0 = (15 \times 1.8 \times 2.7 \times 6.3)/4.5 = 102 \qquad R_0 = \dfrac{6(5.4)^3}{4} = 236$

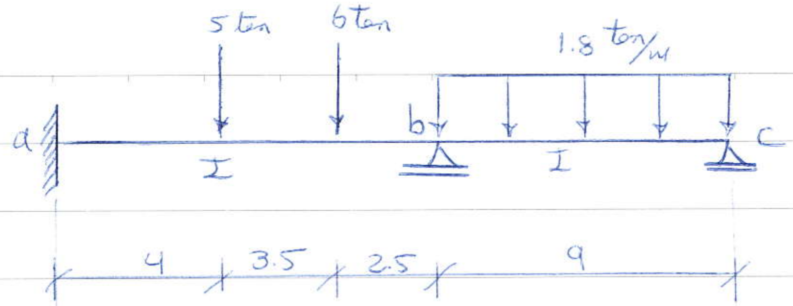
$0 + 2M_0\left(\dfrac{4.5}{I} + \dfrac{4.5}{1.5I}\right) + 0 = -\dfrac{102}{I} - \dfrac{236}{1.5I} \rightarrow M_b = -16 \text{ ton.m}$



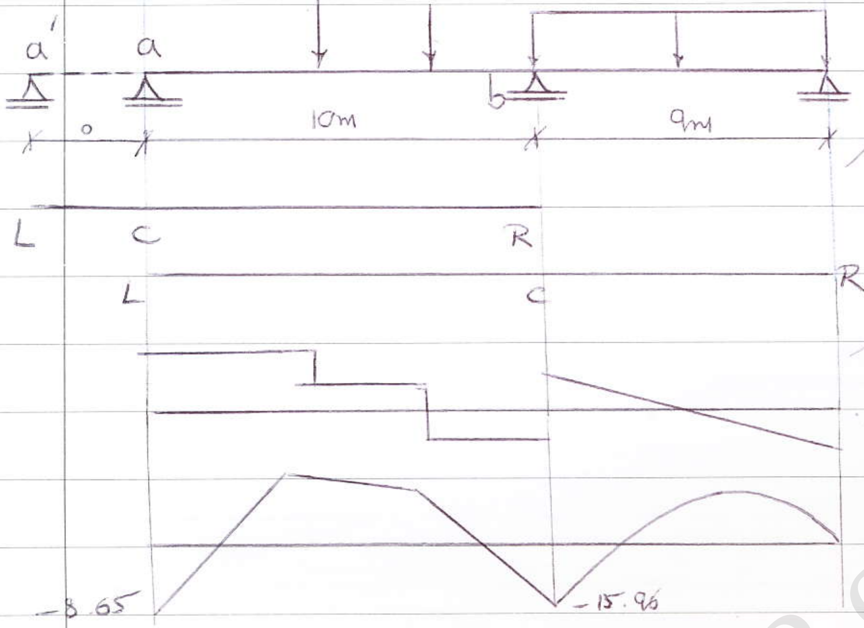

6.1 / 6.2 / 6.13 / 6.17 / 6.19

6.22 / 6.23 / 6.26 / 6.28 / 6.30 / 6.29 / 6.32 / 6.33 / 6.48 ← مثال‌های حل شده

تمرینی ← 6.50 / 6.51 / 6.53 /




تیر سراسری نشان داده شده دارای
نیروهای قائم از نقاط اتکایی دو درجه
نامعین می‌باشد. با انتخاب $m_a$
و $m_b$ به عنوان مجهولات اضافه نیاز
در نقاط یعنی دو بار نوشتن معادله
سه لنگری داریم. تکنیک حل تیرهای سراسری
با تکیه‌گاه انتهایی گیردار به این ترتیب است
که تکیه‌گاه گیردار تبدیل به تکیه‌گاه ساده و
دهانه‌ای به طول صفر به آن اضافه می‌شود
تا تیر سراسری با تکیه‌گاه‌های ساده‌ای شود




$$\delta_{a'} = \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$$

(۱ $\quad a' \quad a \quad b$

$\quad L \quad C \quad R$

$$L_0 = 0 \qquad R_0 = \frac{5\times4\times6\times16}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times12.5}{10} = 332.6$$

$$M_{a'} = 0 \qquad 20M_a + 10M_b = -332.6$$

(۲ $\quad a \quad b \quad c$

$\quad L \quad C \quad R$

$$L_0 = \frac{5\times4\times6\times14}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times17.5}{10} = 364.9$$

$$R_0 = \frac{1.8\times9^3}{4} = 328$$

$$10M_a + 38M_b = -693 \iff \begin{cases} M_a = -8.65 \\ M_b = -15.96 \end{cases}$$

## تشکر :

در انتها لازم میدانم از آقای محمد سیفی (کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیر کبیر) و آقای مهدی زمانی (دانشجوی کارشناسی دانشگاه صنعتی امیرکبیر ) که بنده را در تهیه این فایل کمک نموده اند کمال تشکر را داشته باشم .

در صورت لزوم می توانید با آدرس پست الکترونیکی زیر انتقادات و پیشنهادات خود را ارائه فرمائید .

**hamid_kazem041@yahoo.com**